

# 地学数学入門

## —偏微分方程式の対角化と地球惑星物理学における対称性の話—

所属：地球惑星物理学科 4 年

執筆：三田村彰大

### 概要

地球惑星物理学の分野は大まかに「大気海洋」「固体地球」「宇宙惑星」の3分野で構成されています。そしてそのいずれの分野においても主題となるのは偏微分方程式であり、それら偏微分方程式の解析のためには様々な数学的な道具が必要となります。今回はその中でも

- 流体方程式の解析に用いられるフーリエ変換（大気海洋分野）
- 固体地球潮汐の解析に用いられる球面調和展開（固体地球分野）
- 銀河円盤の解析に用いられる Hankel 変換（宇宙惑星分野）

といった具体例を挙げ、実際に地球惑星物理学科の学生がどのような物理・数学を学んでいるのかを紹介します。

その上で、これらの変換・展開が決してバラバラな道具ではなく、いずれも偏微分方程式の対角化として一般化できるということを示し、その背後にあるスペクトル定理を紹介します。さらに、いずれの変換・展開も、各問題に固有のテクニックではなく考察の対象となる系が持つ対称性に紐付いた自然な操作であるということを示し、地球惑星科学を分野横断的に概観することを目指します。

**キーワード：**ロスビー波、固体地球潮汐、銀河円盤、ダークマター、偏微分方程式、対角化、スペクトル定理、対称性、学科紹介

※注：この記事はページ数圧縮の関係で二段組・小フォントとなっています。PDF 版はもう少しゆとりをもたせたものとなっていますので、本記事が読みづらいと感じられる方はぜひそちらをご参照ください。

## Contents

1	地球惑星物理学で現れる様々な数学.....	28
1.1	フーリエ展開：熱方程式の解析.....	28
1.2	フーリエ変換：渦度方程式の解析とロスビー波の西進について.....	28
1.3	球面調和展開：固体地球潮汐の解析と外部天体による地球の引き伸ばしについて.....	29
1.4	Hankel 変換：銀河の薄い円盤モデルの解析と銀河の回転曲線問題について.....	31
2	偏微分方程式の対角化.....	34
2.1	線形代数における対角化.....	34
2.2	フーリエ変換による渦度方程式の対角化.....	34
2.3	球面調和展開によるポアソン方程式の部分対角化.....	35
2.4	Hankel 変換によるポアソン方程式の部分対角化.....	36
2.5	対角化の一般化とスペクトル定理.....	36
3	地球惑星科学に現れる対称性.....	37
3.1	フーリエ変換と大気海洋の並進対称性.....	37
3.2	ラプラシアンの部分対角化と地球の球対称性・銀河円盤の軸対称性.....	38
4	終わりに.....	39

## 1 地球惑星物理学で現れる様々な数学

地球惑星物理学科は主に「大気海洋」「固体（地球）」「宇宙惑星」の三分野から構成されており、学部生は授業を通じてそれぞれの分野の基礎となる物理を学ぶことができます。その際、どの分野でも避けては通れないのが偏微分方程式の解析であり、それぞれの問題設定に応じて適切な数学的解析手法を用いることが求められます。本章では実際に地球惑星物理学科の授業で学ぶことになる偏微分方程式とそこに現れる数学の具体例をいくつか紹介します。

### 1.1 フーリエ展開：熱方程式の解析

地球惑星物理学科に進学した学部2年生は、最初は駒場にて基本となる偏微分方程式の解き方を学ぶことになります。今回はその一例として、一次元熱方程式と、数学的な道具としてのフーリエ展開を紹介します。

今、長さ  $L$  の金属棒を考えます。この時、この金属棒の位置  $x \in [0, L]$ 、時刻  $t$  における温度  $u(x, t)$  は次の熱方程式に従います。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

特に周期境界条件  $u(0, t) = u(L, t)$ ,  $u_x(0, t) = u_x(L, t)$  の下で上式を解くことを考えてみましょう。この場合、 $u(x, t) = X(x)T(t)$  と変数分離することで問題を解くことができます。誌面の都合上詳しい導出は割愛しますが、結果として解は次のようなフーリエ級数（+時間減衰項）で表されるものとなります。（詳しい導出は [1] などを参照。）

$$u(x, t) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ e^{-\kappa t(2n\pi/L)^2} \times \left( A_n \cos \frac{2\pi nx}{L} + B_n \sin \frac{2\pi nx}{L} \right) \right\} \quad (2)$$

さて、上記の熱方程式の解析においては「変数分離で問題を解いた結果フーリエ級数が現れる」という状態になっており、フーリエ級数は「問題を解いた結果として現れる副産物」のように見えるかもしれません。しかし、「初めからフーリエ展開された解を想定して問題を解く」といった形で問題を解いても同様の結果を得ることができます。実際にやってみましょう。

まず、有限区間  $[0, L]$  で定義されている  $u(x, t)$  を周期関数として無限区間に延長します。これにより  $u(x, t)$  は周期  $L$  を持つことになり、次のようにフーリエ展開することができます。

$$u(x, t) = \frac{a_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n(t) \cos \frac{2\pi nx}{L} + b_n(t) \sin \frac{2\pi nx}{L} \right) \quad (3)$$

次に、こうして得られた  $u(x, t)$  のフーリエ展開を熱方程式 (1) に代入し各項について整理します。すると、解くべき方程

式は以下の非常に簡単な常微分方程式となります。

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} a_0(t) = 0 \\ \frac{d}{dt} a_n(t) = -\kappa \left( \frac{2\pi n}{L} \right)^2 a_n(t) \quad (n = 1, 2, \dots) \\ \frac{d}{dt} b_n(t) = -\kappa \left( \frac{2\pi n}{L} \right)^2 b_n(t) \quad (n = 1, 2, \dots) \end{cases} \quad (4)$$

あとはこれを解けば、(2) 式で表される解を得ることができます。

この部分で特に重要なのはフーリエ展開することで一見複雑な熱方程式が簡単な常微分方程式に「落ちた」という事実です。以下で挙げる例でも同様の現象が見られることとなります。<sup>\*1</sup>

### 1.2 フーリエ変換：渦度方程式の解析とロスビー波の西進について

次に、大気海洋分野からの例としてロスビー波と、その解析のために用いられるフーリエ変換について紹介します。（参考：[3][4]）以下は地球惑星物理学科3年後期の「地球流体力学II」の授業で学ぶことができる内容となります。

まずロスビー波とは何かということについてですが、これは地球の回転によって生じる流れの「うねり」のようなもので、下図に示しているような上空に生じる大規模なジェット気流の蛇行がその典型例となります。

特にこのロスビー波は西向きに進む性質があるのですが、これが偏西風による東向きの押し戻しと拮抗すると蛇行の停滞や高・低気圧の停滞が生じ異常気象につながります。詳細は別記事「高校生からの地球流体力学入門」に詳しいのでぜひこちらも読んでみてください。

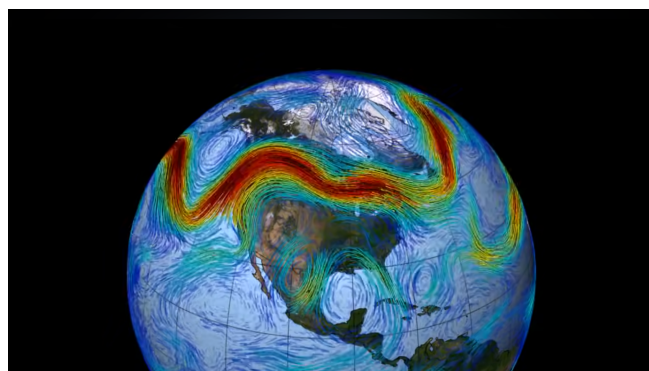


Figure 1: ロスビー波。NASA Scientific Visualization Studio より。 <https://www.youtube.com/watch?v=m0TuC34WSR8&t=1s>

さて、本セクションではこの「ロスビー波には西向きに進む性質がある」ということを示します。より具体的には、ロス

<sup>\*1</sup> ちなみに、ディリクレ境界条件やノイマン境界条件の場合は単に関数を周期延長するだけではうまくいかず、奇関数延長や偶関数延長を考える必要が出てきます。（参考：[2]）

ビー波の位相速度が平均東西流に対して西向きとなることを示します。

今、地球規模の大きな空間スケールでの大気の運動を考えているので鉛直スケールは水平スケールに比べると非常に小さいとみなすことができます。その上で、中緯度対流圏のような東西風が南北風に対して卓越するような状況を考え、東西平均流を  $U$  とおきます。また、流線関数を平均場と擾乱に分け  $\Psi = \Psi_0 + \Psi'$  とします。この時、順圧・非発散・ $\beta$  面近似の下では  $\Psi'$  は次の渦度方程式に従います。<sup>\*2</sup>

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \Psi' + \beta \frac{\partial}{\partial x} \Psi' = 0 \quad (5)$$

(ただし  $x$  は東西方向、 $y$  は南北方向を表し、 $\beta$  はコリオリパラメータ  $f$  に対し  $f = f_0 + \beta y$  を満たす)

この (5) 式がロスビー波を解として与える式に他ならず、通常は (5) において波動解  $\Psi' = \hat{\Psi} \exp[i(kx + ly - \omega t)]$  を代入することで  $(k, l, \omega)$  の関係式を得るとというのが一般的な解析手法になります。しかし、波動解を想定して代入することは本質的にはフーリエ変換して問題を解いていることに他ならず、よって初めからフーリエ変換を表面に出して問題を解くこともできます。やってみましょう。

今、 $\Psi'$  のフーリエ変換は次を満たします。

$$\Psi'(x, y, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint \tilde{\Psi}(k, l, t) e^{i(kx + ly)} dk dl \quad (6)$$

またフーリエ変換により微分は  $\partial/\partial x \rightarrow ik$  のように変換されます。よってこれらを踏まえて (5) 式全体をフーリエ変換して整理すると、各フーリエモードが満たす式は以下のようになります。

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\Psi} = -i \left( Uk - \frac{\beta k}{k^2 + l^2} \right) \tilde{\Psi} \quad (7)$$

これは  $t$  についての非常に単純な微分方程式であり、

$$\tilde{\Psi} = \tilde{\Psi}(k, l, 0) \exp \left\{ -i \left( Uk - \frac{\beta k}{k^2 + l^2} \right) t \right\} \quad (8)$$

とすぐに解くことができます。よって最終的に (5) 式の解として次を得ます。

$$\begin{cases} \Psi'(x, y, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint \tilde{\Psi}(k, l, 0) e^{i(kx + ly - \omega t)} dk dl \\ \omega = Uk - \frac{\beta k}{k^2 + l^2} \end{cases} \quad (9)$$

これがロスビー波であり、特に後半の角周波数  $\omega$  が満たす式は分散関係と呼ばれます。また角周波数を波数で割ったものは位相速度と呼ばれ、今東西方向の平均流に対する相対的な位相速度は分散関係から次のように求まります。

$$C_{\text{phase\_relative}} = \frac{\omega}{k} - U = -\frac{\beta}{k^2 + l^2} \quad (10)$$

今  $C_{\text{phase\_relative}}$  は負になっているので、確かにロスビー波が (平均流に対して) 「西に進む」ということを示すことができました。

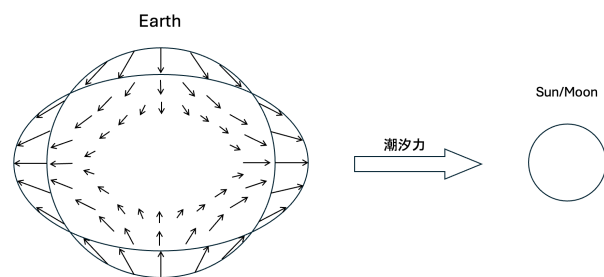
このセクションでもやはり、フーリエ変換によって (5) 式の一見複雑な偏微分方程式が (7) 式のような非常に簡単な微分方程式に「落ちて」いることがわかります。どうやらフーリエ変換もフーリエ展開も、複雑な式を簡単にするという点で共通しているようです。

### 1.3 球面調和展開：固体地球潮汐の解析と外部天体による地球の引き伸ばしについて

次に、固体地球分野からの例として固体地球潮汐を紹介しましょう<sup>\*3</sup>。以下は地球惑星物理学科3年後期の「地球力学」の授業で学ぶことができる内容になります。

潮汐というと、月や太陽の引力に伴う海面の満ち引きを思い浮かべる方が多いと思います。しかし、核やマントルなどの固体部分もまた月や太陽の引力によって変形します。このようにして生じる変形は固体地球潮汐と呼ばれます。

固体地球潮汐によって生じる地球の変形を解析的に求めると、地球が月/太陽軸の向きに引き伸ばされることがわかります。Figure2 に示したのはそれを誇張して表現した図です。今回は、この「引き伸ばし」を支配方程式から導出する過程の一部を紹介します。



**Figure2:** 固体地球潮汐に伴う地球の変形の様子。図の矢印は地球上の各点に働く力の向きを模式的に表しており、図は誇張している。[6] を参考に作成。

今、地球を密度一定・非圧縮の等方弾性球とし、準静的な変形を考えます。また、地球の重心を中心とする球面座標  $(r, \theta, \phi)$  をとり、潮汐変形に伴う弾性体の変位・圧力の摂動・ポテンシャルの摂動をそれぞれ  $\mathbf{u}(r, \theta, \phi)$ ,  $p(r, \theta, \phi)$ ,  $\Phi(r, \theta, \phi)$  とします。また密度を  $\rho$  で表します。このとき摂動量に関する運動方程式と非圧縮条件から次が成り立ちます。

$$\begin{cases} -\nabla(p + \rho\Phi) + \mu\nabla^2 \mathbf{u} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \end{cases} \quad (13)$$

さて、最終的に求めたいのは潮汐に伴う地球の変形であり、これは地球の半径を  $R_E$  として地表面が  $r = R_E + h(\theta, \phi)$  と変形したときの  $h(\theta, \phi)$  です。方針としては、まず (13) の一般解を求めてから、適切な境界条件を設定して解を決定していくことになります。しかし今回は誌面の都合上全ての計算過程を紹介することは難しいので、(13) の偏微分方程式から  $\mathbf{u}$  の一般解を求めるところまでを見てみることにします。この

\*2 詳しくは [5] を参照。

\*3 この章は地球惑星物理学科開講の講義「地球力学」の講義資料を参考にしています。

$$\begin{cases} q(r, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n Q_{nm}(r) Y_n^m(\theta, \phi) \\ \mathbf{u}(r, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left[ U_{nm}(r) Y_n^m(\theta, \phi) \hat{\mathbf{e}}_r + S_{nm}(r) \nabla_{\Omega} Y_n^m(\theta, \phi) + W_{nm}(r) \hat{\mathbf{e}}_r \times \nabla_{\Omega} Y_n^m(\theta, \phi) \right] \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dr} U_{nm}(r) + \frac{2}{r} U_{nm}(r) - \frac{n(n+1)}{r} S_{nm}(r) = 0 \\ \frac{d^2}{dr^2} U_{nm}(r) + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} U_{nm}(r) - \frac{2+n(n+1)}{r^2} U_{nm}(r) + \frac{2n(n+1)}{r^2} S_{nm}(r) = \frac{1}{\mu} \frac{d}{dr} Q_{nm}(r) \\ \frac{d^2}{dr^2} S_{nm}(r) + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} S_{nm}(r) + \frac{2}{r^2} U_{nm}(r) - \frac{n(n+1)}{r^2} S_{nm}(r) = \frac{1}{\mu r} Q_{nm}(r) \end{cases} \quad (12)$$

やり方はいくつか考えられるのですが、今回は記事の目的に合わせて球面調和展開を全面に押し出して解いてみます。

まず、 $q = p + \rho\Phi$  と置くことで (13) 式をスッキリさせます。このとき、スカラー関数  $q(r, \theta, \phi)$  及びベクトル場  $\mathbf{u}(r, \theta, \phi)$  はページ先頭に示された (11) 式のように球面調和展開することができます\*4。(参考: [7][8])

ただし  $\hat{\mathbf{e}}_r$  は動径方向の単位ベクトル、 $\nabla_{\Omega}$  は球面ナブラ演算子  $\nabla_{\Omega} = \hat{\mathbf{e}}_{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\mathbf{e}}_{\phi} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}$  であり、 $Y_n^m$  は次で表される球面調和関数です。(ただし以下で  $P_n^m$  はルジャンドルの陪関数。)

$$Y_n^m(\theta, \phi) = (-1)^{\frac{m+|m|}{2}} \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}} P_n^{|m|}(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (14)$$

さて、球面調和展開はあまり馴染みのない方も多いと思いますので、いくつかの基本的な事柄を説明します。まず大前提として、 $Y_n^m(\theta, \phi)$  は単位球面  $S^2$  上の関数空間  $L^2(S^2)$  の完全正規直交基底となります。すなわち大雑把にはフーリエ級数展開を球面上へ拡張したようなものになっています。

また、球面調和展開における基底である球面調和関数  $Y_n^m$  は球面ラプラシアン  $\nabla_{\Omega}^2$  の固有関数です。ただし球面ラプラシアンとはラプラシアンの極座標表示において  $\theta, \phi$  に依存する部分をまとめたものを指します。

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \underbrace{\left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right\}}_{= \text{球面ラプラシアン } \nabla_{\Omega}^2} \quad (15)$$

この球面ラプラシアンに対し球面調和関数  $Y_n^m$  は次の固有方程式を満たします。[9]

$$\nabla_{\Omega}^2 Y_n^m = -n(n+1) Y_n^m \quad (16)$$

さて、これらを踏まえた上で、(11) において球面調和展開した  $q(r, \theta, \phi)$ ,  $\mathbf{u}(r, \theta, \phi)$  を (13) の偏微分方程式に代入して

みましょう。すると  $Y_n^m$  が球面ラプラシアン固有関数であることや直交性を持つことなどを使うと式が非常によく整理できて、最終的に解くべき式はページ先頭に示された (12) 式のようになります。

一見すると非常に厳しい見方をしていますが、よく見るとこれは  $r$  についての連立常微分方程式でしかありません。すなわち、はじめは3変数の連立偏微分方程式だったものが、球面調和展開をしたことによって1変数の常微分方程式に「落ちた」ということになります。そして、上式を愚直に整理していくと意外にも  $U_{nm}$  についての非常に単純な微分方程式が出現します。

$$(D^2 - D - \lambda)(D^2 + 3D + 2 - \lambda) U_{nm}(r) = 0 \quad (17)$$

ただし上の式では  $D = r \frac{d}{dr}$ ,  $\lambda = n(n+1)$  としました。この微分方程式は級数解法によって解くことができ、よって得られた  $U_{nm}$  の解から遡っていくことで  $S_{nm}$  についての解も得ることができます。

$$\begin{cases} U_{nm}(r) = A_{nm} r^{n+1} + B_{nm} r^{n-1} \\ S_{nm}(r) = \frac{A_{nm}(n+3)}{n(n+1)} r^{n+1} + \frac{B_{nm}}{n} r^{n-1} \end{cases} \quad (18)$$

よって球面調和展開を仮定した  $\mathbf{u}(r, \theta, \phi)$  の係数について完全に解くことができたので、 $\mathbf{u}(r, \theta, \phi)$  の一般解が次のように求まったこととなります\*5。

$$\mathbf{u}(r, \theta, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left[ (A_{nm} r^{n+1} + B_{nm} r^{n-1}) Y_n^m(\theta, \phi) \hat{\mathbf{e}}_r + \left( \frac{A_{nm}(n+3)}{n(n+1)} r^{n+1} + \frac{B_{nm}}{n} r^{n-1} \right) \nabla_{\Omega} Y_n^m(\theta, \phi) \right] \quad (19)$$

さて、一般解さえ求まってしまうと適切な境界条件を設定して  $\mathbf{u}$  の解を構成し、幾何学的条件などを考えて最終的に求めたかった量を算出すれば良いということになります。今回はその計算過程は割愛し、結果をご紹介します。

まずそもそも、我々が何を求めていたかを思い出しましょう。今回最終的に求めたかったのは潮汐に伴う地球の変形で

\*4 ただし今考えているような状況において潮汐を考える場合は、 $\mathbf{u}$  の球面調和展開の第三項 ( $W_{nm}$  の項) は 0 と考えて大丈夫です。(詳しくは [8] を参照。)

\*5 計算の過程で [10] を参考にした。

あり、地球の半径を  $R_E$  として地表面が  $r = R_E + h(\theta, \phi)$  と変形したときの  $h(\theta, \phi)$  なのでした。しかしここで、実際に潮汐変形を考える上では  $h(\theta, \phi)$  を球面調和展開した時の2次のタームのみを考えれば十分であることが知られています。その背景には次のような理由があります。

まず、今回考えている固体地球潮汐の主原因は月/太陽が地球に及ぼす引力(重力)なのでした。そこで外部天体が地球上の点に作る重力ポテンシャルを書き下してみると次のようになります。(参考:[11])

$$V_{\text{重力}} = -\frac{Gm}{R} \left[ \underbrace{1}_{\text{定数項}} + \underbrace{\frac{r}{R} \cos \psi}_{\text{中心力ポテンシャル}} + \underbrace{\left(\frac{r}{R}\right)^2 \frac{3 \cos^2 \psi - 1}{2}}_{\text{潮汐力ポテンシャル}} + \dots \right] \quad (20)$$

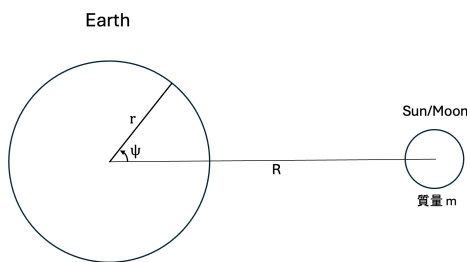
(ただし  $\psi, R, m$  の定義については Figure3 を参照。)

このとき第一項は定数ポテンシャルで力を及ぼさず、第二項は月/太陽が地球の中心に及ぼす中心力を作るポテンシャルであり、潮汐に関わるのは第三項以降です。特に主要なタームにのみ着目すれば、潮汐力ポテンシャルは  $V_{\text{潮汐}} \propto \left(\frac{r}{R}\right)^2 \frac{3 \cos^2 \psi - 1}{2}$  のようになっています。さらに、実は球面調和関数の  $n = 2, m = 0$  の項は、 $Y_2^0 \propto \frac{3 \cos^2 \psi - 1}{2}$  のような形になっており、潮汐ポテンシャル  $V_{\text{潮汐}}$  は  $Y_2^0$  に比例することがわかります。よって固体地球潮汐の主原因である外部天体の引力は球面調和展開の  $n = 2$  の項に効くことになり、球面調和関数の直交性から応答は  $n = 2$  のみを見れば良いのです。(今まで一般の  $n, m$  について必死に問題を解いてきましたが、実際に考えるのは  $n = 2$  だけで良かったのです！)

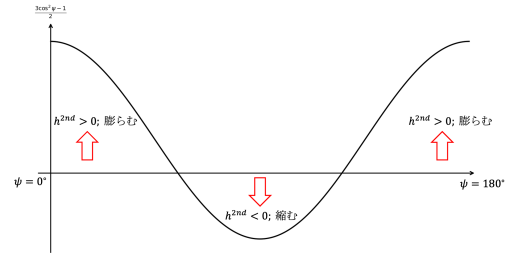
よって、変形  $h(\theta, \phi)$  の2次のタームだけを考えればよく、最終的にその答えは次のようになります\*6。

$$h^{2\text{nd}}(\theta, \phi) = \frac{\frac{5}{2} V_{\text{潮汐}}}{1 + \frac{19}{2} \frac{\mu}{\rho g R_E}} \quad (21)$$

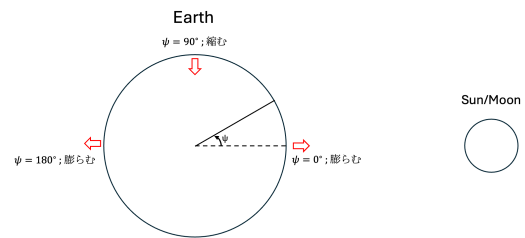
よって  $h^{2\text{nd}} \propto V_{\text{潮汐}} \propto \frac{3 \cos^2 \psi - 1}{2}$  となっていることがわかり、固体地球潮汐に伴う変形は Figure4、Figure5 で表されるような形になることがわかります。



**Figure3:** (20) 式中に現れる  $\psi, R, m$  の定義。  $R$  は地球中心と月/太陽中心間の距離、  $m$  は月/太陽質量。  $\psi$  については図に示した通り。



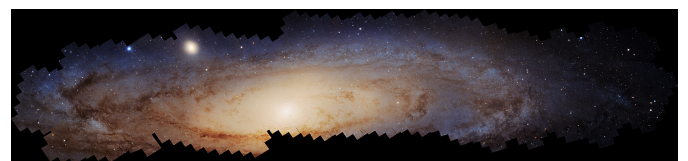
**Figure4:**  $y = \frac{3 \cos^2 \psi - 1}{2}$  のグラフ。今、地球変形は  $h^{2\text{nd}} \propto y = \frac{3 \cos^2 \psi - 1}{2}$  であるから、このグラフが正となる  $\psi$  で地表は膨らみ、負となる  $\psi$  で地表は凹む。



**Figure5:** Figure4 から従う固体地球潮汐の向きを示したもの。月/太陽軸の向きに地球が引き延ばされることがわかる。

こうして固体地球が潮汐によって「引き延ばされる」ことを示したわけですが、この記事で重要なのはあくまで「(13) 式の3変数の連立偏微分方程式が球面調和展開をしたことによって(12) 式の1変数の常微分方程式に落ちた」というところです。フーリエ展開・フーリエ変換に引き続き、球面調和展開においても、使うことで偏微分方程式が簡単になるということがわかりました。

### 1.4 Hankel 変換：銀河の薄い円盤モデルの解析と銀河の回転曲線問題について



**Figure6:** 銀河の参考画像。画像は今年の一月に公開されたハッブル望遠鏡によるアンドロメダ銀河のフォトモザイクパノラマ。600枚を超えるスナップショットを繋ぎ合わせて作られている。 <https://esahubble.org/images/heic2501a/>. Credit:NASA, ESA, B. Williams (University of Washington)

本章の最後に宇宙惑星分野から銀河円盤を紹介します。内容的には天文学科の領分にはなるのですが、地球惑星物理学科の学生の多くは天文学科や物理学科の授業を頻繁にとっており学科同士の棲み分けは非常にあやふやになっています。よって今回は遠慮せず地球惑星物理を扱う記事でまとめて解説してしまいます。

(※ちなみに筆者の4年生の授業は半分以上が工学部の計算機系の授業になっています。理学部生としての自覚が足りない。自由度が高いのが地球惑星物理学科のいいところです。)

\*6 なお、(21) 式に現れる定数  $\frac{5/2}{1 + \frac{19}{2} \frac{\mu}{\rho g R_E}}$  は一般に(2次)のラブ数と呼ばれ、惑星の性質を表す重要な量です。

若干話がそれでしたが、本項のメインテーマは銀河円盤です。特に薄い軸対称な円盤モデルを仮定し、その重力ポテンシャルが支配方程式からどのように導かれるかを順を追って説明します。

また、重力ポテンシャルが求まると銀河の回転速度を求めることができます。一般にこの回転速度は銀河中心からの距離  $R$  に依存し、その  $R$  依存性を表す曲線は回転曲線と呼ばれます。特に、銀河表面の明るさの観測をもとに計算される銀河の回転速度と実際に観測される銀河の回転速度の間にはズレが生じることが知られており、これは「銀河の回転曲線問題」と呼ばれます。このズレを説明するものとして出てくるのがダークマターであり、皆さんも耳にしたことがあるかもしれません。本項ではこちらについても実際に計算し、紙とペンを用いてダークマターの存在を確認します。(参考: [12][14])

まずは銀河円盤の自己重力が作る重力ポテンシャルを求めます。円盤は完全に軸対称であるとし、以下においては円筒座標  $\mathbf{r} = (R, z, \phi)$  を用いることにします。この時位置  $\mathbf{r}$  に存在する物質の密度を  $\rho(\mathbf{r})$  とすると、一般に重力ポテンシャル  $\Phi$  はポアソン方程式  $\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho(\mathbf{r})$  に従います。(ただし  $G$  は万有引力定数。)

さらにいま、円盤が十分薄いと考えると密度  $\rho(\mathbf{r})$  は  $z = 0$  のみに存在すると考えることができるので、円盤の表面密度  $\Sigma$  とデルタ関数を用いて  $\rho(\mathbf{r}) = \Sigma(R) \delta(z)$  のように書き表すことができます。よってこれをポアソン方程式に代入することで重力ポテンシャルの従う式は次のようになります。

$$\nabla^2 \Phi(R, z) = 4\pi G \Sigma(R) \delta(z) \quad (22)$$

これが今回解くべき支配方程式です。円筒座標ラプラシアンを用いれば上式は次のように展開されます。(※途中で軸対称性により  $\phi$  微分項が 0 となることを用いています。)

$$\left[ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \Phi(R, z) = 4\pi G \Sigma(R) \delta(z) \quad (23)$$

さて、この方程式は変数分離を用いて普通に解くことができますが、今回はやはり展開・変換を前面に押し出して問題を解きたいと思います。特に今回は次の Hankel 変換を用います。<sup>\*7</sup>

$$\hat{f}(k) = \int_0^\infty f(x) J_0(kx) x dx \quad (24)$$

ただし  $J_0$  は 0 次のベッセル関数です。<sup>\*8</sup> Hankel 変換も球面調和展開と同様、あまり馴染みがない方が多いと思われるので、いくつかの事柄を説明します。まず、フーリエ逆変換同様 Hankel 変換にも逆変換が存在し、(24) 式の  $\hat{f}(k)$  に対して次が成立します。

$$f(x) = \int_0^\infty \hat{f}(k) J_0(kx) k dk \quad (26)$$

<sup>\*7</sup> より正確には「0 次の」Hankel 変換です。

<sup>\*8</sup> 一般の次数に対するベッセル関数の具体形は次のようになります。[15]

$$J_\nu(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s! \Gamma(\nu + s + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu + 2s} \quad (25)$$

またフーリエ変換においては  $\partial/\partial x \rightarrow ik$  のように変換されましたが、Hankel 変換においては (23) 式中の円筒座標ラプラシアン動径項 ( $R$  微分項) が次のように変換されます。<sup>\*9</sup>

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial}{\partial R} \right) \xrightarrow{\text{Hankel}} -k^2 \quad (27)$$

これらを踏まえて、ロスビー波の解析の時に渦度方程式全体をフーリエ変換したように (23) 式全体を Hankel 変換します。すると、各モードが満たす式が次のようになります。

$$\left( -k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \hat{\Phi}(k; z) = 4\pi G \hat{\Sigma}(k) \delta(z) \quad (28)$$

ただし  $\hat{\Phi}(k; z)$ ,  $\hat{\Sigma}(k)$  はそれぞれ  $\Phi(R, z)$ ,  $\Sigma(R)$  の Hankel 変換です。今 (28) 式は 1 変数のみについての簡単な微分方程式であり、標準的な手法で  $\hat{\Phi}(k; z) = -\frac{2\pi G}{k} \hat{\Sigma}(k) e^{-k|z|}$  と解くことができます。<sup>\*10</sup> よって Hankel 逆変換によって実空間での解を復元すれば、最終的に求めたかった自己重力ポテンシャルが次のように求まります。

$$\Phi(R, z) = -2\pi G \int_0^\infty \hat{\Sigma}(k) e^{-k|z|} J_0(kR) dk \quad (29)$$

このセクションでも、Hankel 変換によって (23) 式で表される 2 変数偏微分方程式が 1 変数に「落ちた」様子を見ることができました。これまでの過程を振り返ると、フーリエ展開・フーリエ変換・球面調和展開・Hankel 変換はいずれも一見解きにくそうな偏微分方程式を解ける形に変えてくれることがわかります。よってこれらの展開・変換には何かしらの共通性があるのではないかと推察されるわけです。

さて、ここからは記事の本筋とは少し離れますが、せっかくなので物理学の未解決問題の一つである「銀河の回転曲線問題」についても紹介しましょう。

今重力ポテンシャルが求まったので、距離  $R$  の位置における銀河円盤の回転速度  $v_c(R)$  を求めることができます。実際遠心力と重力の釣り合いを考えると  $v_c^2/R = \partial\Phi/\partial R$  が満たされるので、先に求めた自己重力ポテンシャルをこの式に代入すれば  $v_c$  が求まります。これを実際に計算してみると次のようになります。

$$v_c^2(R) = 2\pi GR \int_0^\infty k \hat{\Sigma}(k) J_1(kR) dk \quad (30)$$

(ただしベッセル関数に関する関係式  $J_0' = -J_1$  を用いています。)

さて、 $v_c(R)$  の一般形が求まったので、あとは銀河円盤の表面密度  $\Sigma(R)$  さえわかれば  $v_c(R)$  が求まることになります。ここでは  $\Sigma$  を与える手法の一つとして指数減衰モデルを紹介합니다。(参考: [12][14])

まず重要な観測事実として、円盤型銀河の表面輝度 (明るさ) は銀河中心からの距離とともに指数関数的に減衰していくことがわかっています。よって明るさが可視成分の量に対

<sup>\*9</sup>  $\mathcal{H}_0 [\nabla_R^2 f(R)]$  を愚直に部分積分することで示すことができます。(  $\mathcal{H}_0$  が Hankel 変換、 $\nabla_R^2$  が動径ラプラシアン。)

<sup>\*10</sup> 詳しい手順は [https://github-nakasho.github.io/galaxy/axisymmetric\\_model](https://github-nakasho.github.io/galaxy/axisymmetric_model) などが参考になります。個人サイトですが非常にわかりやすくまとまっています。

応していると考えれば、銀河の可視成分（すなわち観測可能な成分）の質量分布もまた指数関数的に減衰しているはずだと予想できます。よって銀河の表面密度  $\Sigma(R)$  の分布として次のような指数減衰モデルを考えることができます。（ただし  $\Sigma_0, R_d$  は定数。）

$$\Sigma(R) = \Sigma_0 e^{-R/R_d} \quad (31)$$

このモデルに従う銀河円盤を指数円盤モデル（exponential disk）と呼びます。特に今、(31) 式で与えられた  $\Sigma$  の Hankel 変換を計算すると次のようになります。

$$\hat{\Sigma}(k) = \frac{\Sigma_0 R_d^2}{(1 + k^2 R_d^2)^{3/2}} \quad (32)$$

よってこれを (30) の  $v_c$  の式に代入して積分を整理すると、最終的に  $v_c$  の解として次を得ます。（参考：[13]）

$$v_c^2(R) = 4\pi G \Sigma_0 R_d y^2 \left\{ I_0(y) K_0(y) - I_1(y) K_1(y) \right\} \quad (33)$$

ただし上式において  $y = \frac{R}{2R_d}$  であり、また  $I_n, K_n$  はそれぞれ第一種及び第二種の変形ベッセル関数です。<sup>\*11</sup>

よって  $v_c(R)$  が求まったので、実際にどのようなグラフになるのかをプロットしてみましょう。今銀河円盤の質量を  $M_d$  としたとき、 $v_c$  は改めて次のように書き直せます。<sup>\*12</sup>

$$v_c^2(R) = 2G \frac{M_d}{R_d} y^2 \left\{ I_0(y) K_0(y) - I_1(y) K_1(y) \right\} \quad (35)$$

よって  $v_c(R)$  のグラフの形状は銀河円盤の質量  $M_d$  と指数モデルの減衰スケール  $R_d$  によって決まることがわかります。今回は天の川銀河を参考に  $M_d, R_d$  を決めることを考え、[17] を参考に次のように決定しました。

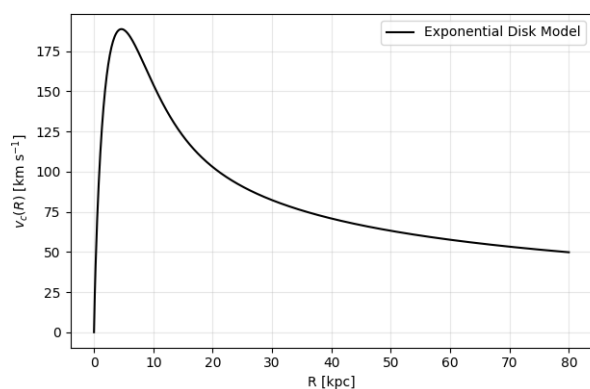
$$M_d \approx 4.6 \times 10^{10} M_{\text{sun}}, \quad R_d \approx 2.15 \text{ kpc} \quad (36)$$

この下で得られた  $v_c(R)$  のプロットが Figure7 です。この銀河の回転速度の  $R$  依存性を表す曲線を回転曲線と呼びます。<sup>\*13</sup>

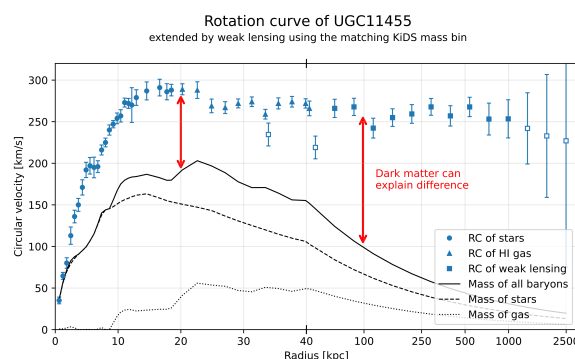
さて今、銀河の表面輝度の観測結果から得られるモデルに基づいて銀河円盤の回転曲線を決定したわけですが、実際に観測される回転曲線とこのモデルの間にはズレがあります。これを示したのが Figure8 です。今 Figure8 において黒い実線や破線で示されているのは、指数円盤モデルのように観測可能な物質の質量分布から予想される回転曲線です。それに対し青で示されているのが実際の銀河の回転速度の観測データになります。

Figure8 をみると、観測可能な質量分布から求めた回転曲線は遠方において減衰しているのに対し、実際の観測データでは遠方においても銀河の回転速度が落ちていないことがわかります。このズレは「銀河の回転曲線問題」と呼ばれ、物理学・天文学の未解決問題の一つです。すなわち、「銀河の回転を維持するだけの質量を持っている」が「観測することはできない」何かが存在していることになるのです。

なお現在はこのズレはダークマターによって説明できると考えられており、逆にこのズレの存在がダークマターの間接証拠であるという見方が一般的です。このほかにも重力レンズ効果による間接証拠などから現在においてはダークマターの存在はほぼ確実視されているようですが、直接的な検出はまだ成されていません。今後の研究に期待したいところです。



**Figure7:** 指数円盤モデルにおける回転曲線のプロット。パラメータは  $M_d = 4.6 \times 10^{10} M_{\text{sun}}$ ,  $R_d = 2.15 \text{ kpc}$  であり、天の川銀河をモデルに [17] を参考にして決定した。またこのモデルにおいて回転速度が最大となるのは  $R/R_d \approx 2.2$  の時で、その位置における銀河の回転速度は  $v_{\text{peak}} \approx 189 \text{ km/s}$  となる。



**Figure8:** 銀河の質量分布から想定される銀河円盤の回転曲線と実際に観測される回転曲線のズレ。en:wikipedia Galaxy rotation curve の項から抜粋。青のプロットが観測データ、黒線が観測可能な物質の質量分布から予測される回転曲線を示す。ズレはダークマターの存在によって説明される。"Rotation Curve UGC11455.svg" ScienceDawns Wikimedia Commons CC BY-SA 4.0

というわけで、いささか時間がかかりましたが紙とペン（と少しばかりの Python）を用いてダークマターの存在にたどり着くことができました。地球惑星科学（この場合は天文学に近いですが）の魅力を少しでも感じていただけたのではないのでしょうか。

<sup>\*11</sup> 一般の次数  $\nu$  に対して第一種・第二種変形ベッセル関数はそれぞれ次のように表されます。ただし  $J_\nu$  はベッセル関数です。[16]

$$I_\nu(x) = i^{-\nu} J_\nu(ix), \quad K_\nu(x) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\sin \nu\pi} \quad (34)$$

<sup>\*12</sup> 銀河円盤の質量  $M_d$  は愚直に積分することで求められます。

<sup>\*13</sup> パラメータを色々いじってみたい人向けに [https://github.com/ramutami/galactic\\_disk\\_exponential\\_model](https://github.com/ramutami/galactic_disk_exponential_model) に Python コードを置いてあります。

ここまでの地球惑星物理学で学ぶことになる物理・数学の紹介になります。次の章以降は地球惑星科学よりかは数学に近い内容になっていますが、興味のある方はぜひ読んでいただくと筆者が喜ぶます。

## 2 偏微分方程式の対角化

先の章では地球惑星物理学のそれぞれの分野で現れる偏微分方程式と、それらを解析するために用いられる数学的手法について紹介してきました。特に、フーリエ変換・球面調和展開・Hankel 変換といった道具が複雑な偏微分方程式を簡素化し、それにより問題が解ける形に「落ちる」様を観察しました。

その続きとなる本章では議論を少しだけ一般化して、「なぜフーリエ変換や球面調和展開や Hankel 変換で問題が解けるようになるのか」という疑問について考えていこうと思います。その中でフーリエ変換・球面調和展開・Hankel 変換が本質的には「対角化」であるということを示し、さらにその背景にある数学理論としてスペクトル定理を紹介します。

### 2.1 線形代数における対角化

本章の最終的な目標は先に述べた通りフーリエ変換・球面調和展開・Hankel 変換が「偏微分方程式の対角化」であることを示すことなのですが、いきなりそのような問題について考えるのは難しいのでまずは馴染み深い線形代数に立ち返ってみることにします。今、行列  $A$ 、ベクトル  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{b}$  に対して次で表される連立一次方程式を考えます。

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (37)$$

この問題を対角化を利用して解いてみましょう。そのため今回は  $A$  にエルミート性を仮定します。なぜなら任意のエルミート行列はユニタリ対角化可能という良い性質があるからです。

**定理：エルミート行列のユニタリ対角化**

$A$  をエルミート行列とする。この時あるユニタリ行列  $U$  と対角行列  $D$  が存在して  $UAU^{-1} = D$  となる。

この時  $A$  を対角化するユニタリ行列  $U$  を (37) の両辺にかけると問題は対角化されます。実際、

$$\begin{aligned} UA\mathbf{x} &= U\mathbf{b} \\ \leadsto DU\mathbf{x} &= U\mathbf{b} \\ \leadsto D(U\mathbf{x}) &= (U\mathbf{b}) \end{aligned} \quad (38)$$

のようにして (37) が対角行列で表される問題に帰着されます\*14。特に、対角行列は逆行列がすぐに求まるのでこれは非常に簡単な問題になります。よって対角化によって  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  という連立一次方程式が単純化したことがわかります。

また、 $U$  はユニタリ行列でありその要素は正規直交基底

$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots$  によって構成されます。\*15 よって今  $U\mathbf{x}$  について

$$U\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1^\dagger \\ \mathbf{e}_2^\dagger \\ \vdots \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{x} \rangle \\ \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{x} \rangle \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (39)$$

となっているので、 $U\mathbf{x}$  は基底  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots)$  で  $\mathbf{x}$  を表現した時の係数が並んだベクトルになります。\*16 よって (38) に現れる  $U\mathbf{x}$  や  $U\mathbf{b}$  は、ユニタリ行列  $U$  により基底を張り替えた後の  $\mathbf{x}$  や  $\mathbf{b}$  の表現ということになり、対角化による問題の単純化は「ユニタリ行列を用いて基底を張り替えたことによる問題の単純化」とも見なすことができます。

よってこれらを踏まえると、(38) で示したような連立一次方程式の対角化を次のように読み替えることができます。

#### 連立一次方程式の対角化

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  という連立一次方程式を考える。この時  $A$  がエルミート行列ならば、あるユニタリ行列  $U$  が存在して、 $U$  で基底を張り替えることにより問題は対角行列  $D = UAU^{-1}$  で表される簡単な問題に帰着される。

この見方はこの先において偏微分方程式と対角化を結びつける際に重要になってきます。

### 2.2 フーリエ変換による渦度方程式の対角化

さていよいよ次は偏微分方程式の話です。前章のロスビー波に関する節ではフーリエ変換を用いることで3変数の偏微分方程式である渦度方程式が1変数の簡単な微分方程式に落ちるということを述べましたが、本節ではその解析過程が対角化とよく似ていることを示します。

今一度渦度方程式を書き下すと次のようになります。

$$\left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + \beta \frac{\partial}{\partial x} \right] \Psi' = 0 \quad (40)$$

また、フーリエ変換・フーリエ逆変換をそれぞれ  $\mathcal{F}, \mathcal{F}^{-1}$  と書き表すことにします。この時、フーリエ変換に関する諸公式を用いると次の関係式を導くことができます。

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left[ \underbrace{\left( \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + \beta \frac{\partial}{\partial x}}_{\mathcal{L}_{\text{渦とおく}}} \right] \mathcal{F}^{-1} \\ = \underbrace{\left[ (k^2 + l^2) \left\{ -\frac{\partial}{\partial t} - i \left( Uk - \frac{\beta k}{k^2 + l^2} \right) \right\} \right]}_{\mathcal{M}_{\text{渦とおく}}} \end{aligned} \quad (41)$$

上の式を見ると  $\mathcal{F}\mathcal{L}_{\text{渦}}\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{M}_{\text{渦}}$  という形になっており、対角化  $UAU^{-1} = D$  と非常に似た関係になっていること

\*15 より厳密には  $U^{-1} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots)$  となります。

\*16  $\mathbf{e}_j^\dagger$  は共役転置を、 $\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{x} \rangle$  は内積を表します。

\*14 ただし  $UAU^{-1} = D \leadsto UA = DU$  を使いました。

がわかります。すなわち  $\mathcal{L}_{\text{渦}}$  が  $A$  に、 $\mathcal{M}_{\text{渦}}$  が  $D$  に対応していると予想される訳です。実際、 $\mathcal{L}_{\text{渦}}$  は渦度方程式  $\mathcal{L}_{\text{渦}}\Psi' = 0$  を与える微分演算子であり、 $A$  が連立一次方程式  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  を与えることとよく対応しています。

また、実際にロスビー波を解析した時のことを思い返すと、 $\mathcal{M}_{\text{渦}}$  はフーリエ変換したことによって問題が簡単になった時に現れた演算子です。(フーリエ変換後に現れた (7) 式は  $\mathcal{M}_{\text{渦}}\tilde{\Psi} = 0$  と等価です。) これは、連立一次方程式を対角化すると対角行列  $D$  が現れ問題が簡単になることとよく似ています。よってやはり、 $\mathcal{M}_{\text{渦}}$  と  $D$  はよく対応しているようです。

また、実際のロスビー波の解析においては渦度方程式をフーリエ変換し、波数空間において問題を解いてから再び実空間に戻って解を復元しました。その途中、波数空間に移ったことによって  $\mathcal{L}_{\text{渦}}$  が  $\mathcal{M}_{\text{渦}}$  に置き換わり、 $x, y$  についての微分が  $k, l$  の関数の単純な掛け算で置き換わりました。このように一旦空間を移し替えることにより問題が単純化される様子は、連立一次方程式の対角化においてユニタリ行列をかけることによって基底を移し替えることで問題が単純化される様子とよく似ています。(奇しくもフーリエ変換はユニタリ変換になっています。)

よってこれまでの話をまとめると次のようになります。

#### 渦度方程式のフーリエ変換による解析

$\mathcal{L}_{\text{渦}}\Psi' = 0$  という形で表される渦度方程式を考える。この時、ユニタリ変換(フーリエ変換)  $\mathcal{F}$  で空間を移し替えることにより問題は「微分が掛け算に置き換わった演算子」 $\mathcal{M}_{\text{渦}} = \mathcal{F}\mathcal{L}_{\text{渦}}\mathcal{F}^{-1}$  で表される簡単な問題に帰着される。

これを見ると、確かに渦度方程式の解析過程は連立一次方程式の対角化とよく対応しています。

### 2.3 球面調和展開によるポアソン方程式の部分対角化

次に、球面調和展開を用いて固体地球潮汐を解析した過程もまた、偏微分方程式の対角化と非常によく似た操作であるというを示します。

ただし、固体地球潮汐はやや方程式系が煩雑なので、似た系として地球の重力ポテンシャル  $\Phi$  が満たすポアソン方程式  $\nabla^2\Phi(r, \theta, \phi) = 4\pi G\rho(r, \theta, \phi)$  の解析を考えます。

今、球面ラプラシアンを明示的に書けばポアソン方程式は

$$\left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \nabla_{\Omega}^2 \right] \Phi(r, \theta, \phi) = 4\pi G\rho(r, \theta, \phi) \quad (42)$$

のようになります。

この時重力ポテンシャルと地球の密度をそれぞれ

$$\begin{cases} \Phi(r, \theta, \phi) = \sum_{n,m} \Phi_{nm}(r) Y_n^m(\theta, \phi) \\ \rho(r, \theta, \phi) = \sum_{n,m} \rho_{nm}(r) Y_n^m(\theta, \phi) \end{cases} \quad (43)$$

のように球面調和展開すれば、(42) の3変数の偏微分方程式

は次のような一変数の微分方程式に落ちます。

$$\left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} n(n+1) \right] \Phi_{nm}(r) = 4\pi G\rho_{nm}(r) \quad (44)$$

ここで、球面上の関数に対しその球面調和展開の展開係数を返す変換  $S$  を定義します。具体的には、今  $f = \sum f_{nm} Y_n^m$  のように球面調和展開される関数があったとすると  $S(f) = \{f_{nm}\}_{n=0,1,\dots}^{-n \leq m \leq n}$  となります。 $S$  は関数に対し係数「列」を返す写像です。<sup>\*17</sup> また  $S$  の逆変換  $S^{-1}$  は与えられた係数列に対しそれを球面調和展開の係数に持つような関数を返します。模式的には次のようになります。

$$f = \sum f_{nm} Y_n^m \xrightarrow[S^{-1}]{} \{f_{nm}\}_{n=0,1,\dots}^{-n \leq m \leq n} \quad (45)$$

この時、次が成立することが示せます。<sup>\*18 \*19</sup>

$$S \left[ \underbrace{\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \nabla_{\Omega}^2}_{\mathcal{L}_{\text{重}}} \right] S^{-1} = \underbrace{\left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} n(n+1) \right]}_{\mathcal{M}_{\text{重}}} \quad (46)$$

この場合もやはり、渦度方程式の場合と同様  $UAU^{-1} = D$  と非常によく似た関係になっています。また、 $\mathcal{L}_{\text{重}}$  はポアソン方程式  $\mathcal{L}_{\text{重}}\Phi = 4\pi G\rho$  を与える演算子であり、 $\mathcal{M}_{\text{重}}$  は問題が球面調和展開によって簡単になった時に現れる演算子です。特に、 $\theta, \phi$  についての微分の項である球面ラプラシアンが  $S$  によって  $-n(n+1)$  についての単純な関数の掛け算に落ちていることがわかります。

また、固体地球潮汐の解析を思い起こせばわかるように、球面調和展開は問題を関数空間から係数空間上へ移しかえることで問題を解ける形に落としています。実際に球面調和展開の係数列を与える  $S$  もまた、関数空間から係数空間へと定義された変換であり、この変換により  $\mathcal{L}_{\text{重}}$  は  $\mathcal{M}_{\text{重}}$  という比較的単純な演算子へと落ちています。加えて  $S$  はユニタリです。<sup>\*20</sup>

以上より次のようにまとめることができます。

#### ポアソン方程式の球面調和展開による解析

$\mathcal{L}_{\text{重}}\Phi = 4\pi G\rho$  というポアソン方程式を考える。この時、ユニタリ変換(関数に対し球面調和展開の係数を返す変換)  $S$  で空間を移し替えることにより問題は「微分が掛け算に置き換わった演算子」 $\mathcal{M}_{\text{重}} = S\mathcal{L}_{\text{重}}S^{-1}$  で表される簡単な問題に帰着される。

\*17 すなわち  $S$  は関数空間  $L^2(S^2)$  から係数空間

$l^2(\{n, m | n = 0, 1, \dots, -n \leq m \leq n\})$  への変換となります。

\*18 ただし厳密には、 $S$  は  $r$  を固定させて  $\theta, \phi$  に対して作用させることとなります。

\*19 また、係数列の空間において演算子がどう作用するかということについては適切に定める必要があります。

\*20 ただし内積・測度を適切に定める必要があります。

よって連立一次方程式の対角化と見比べることでやはり、球面調和展開を用いた解析もまた連立一次方程式の対角化とよく対応していることがわかります。ただし渦度方程式の場合と違い「対角化」されるのは球面ラプラシアン  $\nabla_{\Omega}^2$  の部分だけです。動径方向  $r$  の微分は球面調和展開では対角化されません。

## 2.4 Hankel 変換によるポアソン方程式の部分対角化

流れに沿って、最後は銀河円盤を解析した過程においてもまた、偏微分方程式の「対角化」が行われているということを示します。

今、銀河円盤の出発点となった支配方程式もまたポアソン方程式なのでした。ただしこちらは円筒座標であり、また軸対称性から  $\phi$  微分の項が落ちて、以下のような形になっていました。

$$\left[ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \Phi(R, z) = 4\pi G \Sigma(R) \delta(z) \quad (47)$$

ここで、Hankel 変換・Hankel 逆変換をそれぞれ  $\mathcal{H}, \mathcal{H}^{-1}$  と書き表すことにします。この時、次の関係式を導くことができます。

$$\underbrace{\mathcal{H} \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right]}_{\mathcal{L}_{\text{雷}} \text{とおく}} \underbrace{\mathcal{H}^{-1}}_{\mathcal{M}_{\text{雷}} \text{とおく}} = \left[ -k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \quad (48)$$

よってやはり、これまでと同様行列の対角化  $UAU^{-1} = D$  と同様の構造が現れています。また  $\mathcal{L}_{\text{雷}}$  はポアソン方程式  $\mathcal{L}_{\text{雷}}\Phi = 4\pi G \Sigma \delta_z$  を与える演算子であり、 $\mathcal{M}_{\text{雷}}$  は問題が Hankel 変換によって簡単な問題に「落ちた」時に現れる演算子です。特に今回の場合は、 $R$  についての微分の項が  $k$  の関数についての単純な掛け算に落ちています。

また、Hankel 変換  $\mathcal{H}$  は実空間から波数空間への変換でもあります。よって空間の移し替えにより  $\mathcal{L}_{\text{雷}}$  が  $\mathcal{M}_{\text{雷}}$  という単純な演算子へと落ちている点もこれまでと同様です。またこの場合においても、 $\mathcal{H}$  はユニタリです。

よって Hankel 変換については次のようにまとめることができます。

### ポアソン方程式の Hankel 変換による解析

$\mathcal{L}_{\text{雷}}\Phi = 4\pi G \Sigma \delta_z$  というポアソン方程式を考える。この時、ユニタリ変換 (Hankel 変換)  $\mathcal{H}$  で空間を移し替えることにより問題は「微分が掛け算に置き換わった演算子」 $\mathcal{M}_{\text{雷}} = \mathcal{H}\mathcal{L}_{\text{雷}}\mathcal{H}^{-1}$  で表される簡単な問題に帰着される。

よってこれまでと同様、連立一次方程式の対角化とよく対応しています。ただし Hankel 変換において「対角化」されるのは円筒座標ラプラシアンの  $R$  微分項  $\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial}{\partial R} \right)$  だけで

す。 $z$  方向 (及び存在する場合は  $\phi$  方向) については Hankel 変換では対角化されません。

さて、ここまでフーリエ変換・球面調和展開・Hankel 変換による偏微分方程式の解析が本質的には対角化であるということを示そうとしてきました。ここまでの結果をまとめると、次ページ先頭の Table1 のようになります。

この表を見ると、確かにこれまでやってきたことは偏微分方程式の「対角化」と呼んでよさそうです。(より詳しくは偏微分演算子  $\mathcal{L}$  の「対角化」になっていそうです。)しかし、偏微分方程式においてどのような場合に「対角化」が可能なのか、「対角化」された結果として度々出てきた「微分が掛け算に置き換わった演算子」とは何なのか、そしてこの「対角化」の背景にある数学理論は何なのかといったことは不明なままです。そのような疑問に答えるのが、次に紹介するスペクトル定理です。

## 2.5 対角化の一般化とスペクトル定理

本章の初めにエルミート行列はユニタリ対角化可能であるという定理を紹介しました。実はこれの演算子バージョンが存在していて、それが偏微分方程式の「対角化」の背景理論となるスペクトル定理と呼ばれる非常に強力な定理です。

今、スペクトル定理は次のようなことを主張します。(参考: [20][19][21])

### 定理：スペクトル定理

$\mathcal{L}$  を自己共役作用素とする。この時あるユニタリ変換  $U$  と掛け算作用素  $\mathcal{M}$  が存在して、 $U\mathcal{L}U^{-1} = \mathcal{M}$  となる。

\*21 一つ一つ見ていきましょう。まず、作用素という言葉が出てきましたがこれは演算子のより広いクラスのようなものだと思って差し支えありません。その上で内容を見てみると、スペクトル定理はその条件として作用素の自己共役性を要求しています。これは、行列の場合に対角化の条件としてエルミート性が要求されたことに対応します。実際、線形代数を関数解析 (より厳密にはヒルベルト空間論) に拡張する際、自己共役作用素はエルミート行列の一般化になっています。

\*21 厳密な主張は次のようになります。

### 定理：スペクトル定理

$H$  をヒルベルト空間、 $A$  を  $H$  上の線形作用素とする。この時  $A$  が自己共役作用素であるならば、ある  $\sigma$ -有限測度空間  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 、 $H$  から  $L^2(X, \mu)$  へのユニタリ作用素  $U$ 、 $X$  上ほとんど至る所可測な実数値関数  $F$  が存在して次が成立する。

$$(1) h \in D(A) \iff F \cdot (Uh) \in L^2(X, \mu)$$

$$(2) U(D(A)) \text{ 上で } UAU^{-1} = M_F$$

ただし  $M_F$  は  $F$  が与える掛け算作用素で  $(M_F f)(x) = F(x)f(x)$ 。

	連立一次方程式の対角化	偏微分方程式の「対角化」
問題設定	$Ax = b$	$\mathcal{L}f = g$
対角化が可能になる条件	$A$ がエルミート行列	(?)
対角化が行っている操作	ユニタリ行列 $U$ による 基底の張り替え	ユニタリ変換 $U$ による 空間の移し替え
対角化が行っている変換	$A \rightsquigarrow UAU^{-1}$	$\mathcal{L} \rightsquigarrow U\mathcal{L}U^{-1}$
対角化により 問題が単純化される理由	$D = UAU^{-1}$ が対角行列	$\mathcal{M} = U\mathcal{L}U^{-1}$ が 「微分が掛け算に置き換わった演算子」
背景理論	エルミート行列は ユニタリ行列で対角化可能	(?)

Table1: 連立一次方程式の対角化と偏微分方程式の「対角化」の比較

次に、スペクトル定理においては作用素はユニタリ変換によって「掛け算作用素」へと変換されると述べています。そもそも掛け算作用素とはなんぞやという話ですが、これは線形代数を関数解析へ一般化した際に現れる対角行列の一般化です。より具体的には、関数  $f$  への作用が適当な関数  $F(x)$  を用いて次のように表されるような作用素を言います。

$$(\mathcal{M}f)(x) = F(x)f(x) \quad (49)$$

これまで見てきた偏微分方程式の「対角化」においては、微分を含む演算子が適当な関数の掛け算で表される演算子に「落ちて」いたのです。(フーリエ変換により  $\partial_x \rightarrow ik$  と変換される例など。) スペクトル定理に基づいて考えれば、これは対角行列の厳密な一般化としての掛け算作用素が見えていたことになるのです。

よってここまでの観察から、スペクトル定理が線形代数における対角化の演算子への一般化であるということがわかりました。またこれまで見えていた偏微分方程式の「対角化」は、このスペクトル定理により保証される演算子の対角化であることがわかります。(よってこれまで鉤括弧つきで「対角化」と呼んでいましたが、その必要もなくなります。) また、一般的にはこのような操作は対角化ではなくスペクトル分解と呼ばれています。

よって、フーリエ変換・球面調和展開・Hankel 変換は確かに偏微分方程式の対角化であるということがわかりました。(ただし球面調和や Hankel 変換は完全な対角化ではなく部分対角化になります。)

すなわち、「なぜこれらの展開・変換によって問題が解けるようになるのか」という疑問への答えは、「フーリエ変換・球面調和展開・Hankel 変換が演算子を対角化し、問題を掛け算作用素で表される単純な問題へと帰着させるから」ということになります。

### 3 地球惑星科学に現れる対称性

先の章では「なぜフーリエ変換や球面調和展開や Hankel 変換で問題が解けるようになるのか」という疑問について考えてきました。その上で「偏微分方程式の対角化」という一つの答えを示し、さらにその背景にあるスペクトル定理の主張を述べました。

しかし、スペクトル定理はあくまで自己共役な作用素を対角化するユニタリ変換の存在を保証するのみであって、具体的にどのような手法で対角化すれば良いのかを教えてくれるわけではありません。すなわち何か未知の偏微分方程式に出会ったときに、果たしてフーリエ変換が有効なのか球面調和展開が有効なのかはたまた Hankel 変換が有効なのか、スペクトル定理だけではわからないのです。<sup>\*22</sup>

そこで本章では新たに「対称性」という見方を持ち込むことを考えます。具体的にはこれまでに挙げた各スペクトル分解が並進対称性・回転対称性・軸対称性などどのように結び付くかを観察し、これらの解析手法が決して突発的な思い付きによる飛び道具的なものではなく、系が持つ対称性との相性の良さから選ばれる至って自然な解析手法であるということを示します。

#### 3.1 フーリエ変換と大気海洋の並進対称性

まず初めにフーリエ変換と対称性の関係について述べます。まず、重要な事実としてフーリエ変換  $\mathcal{F}$  は並進の生成子  $-i\partial_x$  を対角化します。<sup>\*23</sup> 実際、

$$\mathcal{F}(-i\partial_x)\mathcal{F}^{-1} = k \quad (50)$$

のようになることが簡単にわかります。よってより一般に、 $\partial_{x_i}$  の関数として書き表される演算子はフーリエ変換によって対角化されることになります。例として、三度の登場にはなり

<sup>\*22</sup> ここで挙げた解析手法以外にもルジャンドル展開やラプラス変換など、解析に使える道具は様々あります。

<sup>\*23</sup> 生成子については量子力学の教科書などを参考。

ますが、再度渦度方程式を見てみましょう。

$$\left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + \beta \frac{\partial}{\partial x} \right] \Psi' = 0 \quad (51)$$

(51) 式をみると、確かに  $(\partial_t$  を除けば) 演算子は  $\partial_x, \partial_y$  のみの関数となっています。これが渦度方程式にフーリエ変換が有効だった理由です。(ここに  $x$  や  $x^2$  などの項が入るとフーリエ変換は必ずしも有効ではなくなります。)

よってフーリエ変換を用いる指標の一つとして「演算子が  $\partial_{x_i}$  の関数として表されているかどうか」を見るのが有効であるということがわかりました。その上で、 $\partial_{x_i}$  が並進の生成子であることから  $\partial_{x_i}$  の関数として表される演算子は並進対称性を持つことになります。よってフーリエ変換が有効な問題の多くは必然的に並進対称性を持つことになるのです。

実はこのことはより強く数学的にも主張できます。([22])

(Tao の講義資料より)

$L^2(\mathbb{R}^d)$  上の有界な作用素  $\mathcal{L}$  が並進作用素  $\tau_a$  と交換するとき、 $\mathcal{L}$  は波数空間上で掛け算作用素となる。

一つ一つ見てみましょう。 $\mathcal{L}$  が並進作用素  $\tau_a$  と交換するというのはすなわち  $\mathcal{L}$  が並進対称性を持つということを意味しています。<sup>\*24</sup> また「波数空間上で掛け算作用素となる」ということが「対角化可能」ということの別表現であるということはスペクトル定理の項で見た通りです。よってこの定理は、「作用素が並進対称性を持つならフーリエ変換が有効である」と主張していることとなります。<sup>\*25</sup>

特に大気や海洋のような、局所的に見れば各方向に一樣であるような系においてこのことは強い威力を発揮します。今自分が突然消しカスくらいのサイズになって太平洋のど真ん中に放り込まれたところを想像してみてください。地球の丸みや海岸線の形状などの非対称な要素をあなたは感じる事ができず、世界は水平方向に一樣であると錯覚するはずで。<sup>\*26</sup>

もちろんこれは誇張表現ですが、実際地球流体力学の分野では水平方向に一樣な場合を想定して問題を解くことが多々あり、よってフーリエ変換が様々な場面で現れることとなります。よって渦度方程式の解析にフーリエ変換を用いたのは決して突拍子もない天才的な発想が浮かんだからなどではなく、それが並進対称性から要求される至って自然な操作だからなのです。

### 3.2 ラプラシアンの部分対角化と地球の球対称性・銀河円盤の軸対称性

次に球面調和展開と Hankel 変換について考えます。2.3 節及び 2.4 節の議論を思い出すと、球面調和展開も Hankel 変換

もいずれもラプラシアンの部分対角化を行っているのです。すなわち次のようになっています。

$$\begin{aligned} \text{球面座標 } \nabla^2 : & \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) \\ & + \frac{1}{r^2} \underbrace{\left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right\}}_{\text{球面調和展開で対角化される部分}} \\ \text{円筒座標 } \nabla^2 : & \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ & \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Hankel 変換で対角化される部分}} \end{aligned} \quad (52)$$

よって「球面座標で表すのが自然な系で方程式にラプラシアンが現れるような問題」においては球面調和展開が、「円筒座標で表すのが自然な系で方程式にラプラシアンが現れるような問題」においては Hankel 変換が問題を部分対角化し、一部の変数に関する微分を掛け算に落としてくれるので問題が解きやすくなります。

この時、球面座標で表すのが自然な系というのはすなわち球対称性に近い構造を持った系のことであり、その代表例が地球になります。実際重力ポテンシャルや電磁気のポテンシャルが満たす方程式にポアソン方程式やラプラス方程式が現れることから、それら式中のラプラシアン演算子を部分対角化する球面調和展開が問題の解析に有効となるのです。

また円筒座標系で表すのが自然な系というのはすなわち軸対称性に近い構造を持った系のことであり、その代表例が銀河円盤や原始惑星系円盤、楕円体地球などになります。宇宙惑星分野においてもやはり重力が主要な力となることからポテンシャルが満たす方程式としてポアソン方程式やラプラス方程式が現れるので、先に述べた理由から Hankel 変換が有効となります。

よってこれまでの話をまとめると、フーリエ変換は並進対称性と、球面調和展開は球対称性と、Hankel 変換は軸対称性と結びついた量であるということがわかります。より具体的には次のようにまとめることができます。

- 問題となる演算子が並進対称性を持つ有界な作用素であるか、あるいは並進の生成子で作られるような演算子である場合にフーリエ変換が有効となる。
- 系が球対称性を持ち球面座標を選択するのが自然であるような問題設定で、かつ方程式にラプラシアンが現れる場合に球面調和展開が有効となる。
- 系が軸対称性を持ち円筒座標を選択するのが自然であるような問題設定で、かつ方程式にラプラシアンが現れる場合に Hankel 変換が有効となる。

よって水平方向の対称性がよくみられる大気海洋分野においてはフーリエ変換が、球対称性に近い構造を持つ固体地球に関係した分野では球面調和展開が、軸対称性を持つ円盤構造が現れるような宇宙惑星分野の問題においては Hankel 変換が

<sup>\*24</sup> 実際、 $\mathcal{L}$  が並進作用素  $\tau_a$  と交換するとき  $\tau_a \mathcal{L} = \mathcal{L} \tau_a \rightsquigarrow \tau_a \mathcal{L} \tau_a^{-1} = \mathcal{L}$  であるので  $\mathcal{L}$  は並進で不変、すなわち並進対称性を持ちます。

<sup>\*25</sup> ただしこの定理では作用素は有界な場合に限られるので、実際の解析で使えるというよりはあくまで構造として並進対称性と結びついているという感覚で捉えるのが良いかと思います。

<sup>\*26</sup> もちろん、そんなことはない！という人がいてもいいと思います。地球惑星物理学は多様性に寛容です。

有効となります。<sup>\*27</sup>

すなわち地球惑星物理学で重要な技術である偏微分方程式の対角化を行う上では、今考えている系がどのような対称性を持っているかに着目することが重要であり、そこから導き出される自然な解析手法を選び取るのが肝要です。

対称性という概念は決して数学や物理学だけで扱われるような概念ではありません。地球惑星科学を学ぶ上でも対称性を意識することによって問題を見通しよく解くことができるようになり、分野横断的な理解につながります。この章を通じてそのことを少しでもお示しできていれば幸いです。

## 4 終わりに

大気海洋分野におけるフーリエ変換、固体地球分野における球面調和展開、宇宙惑星分野における Hankel 変換は決してバラバラな技巧ではありません。いずれも偏微分方程式を対角化することで問題を簡素化するという特性を持ち、ユニタリ同値な掛け算作用素の存在を保証するスペクトル定理によりその性質は一般化されます。またこれらの展開・変換は決して天下一の与えられるアドホックなものではなく、考察の対象となる系の対称性と結び付いた非常に自然な操作です。本稿では空間の並進対称性とフーリエ変換が、球対称性と球面調和展開が、軸対称性と Hankel 変換が自然に結び付く様を示しました。また本記事ではフーリエ展開については詳しく解説しませんが、フーリエ展開と密接に結び付いた概念である周期性を円周の回転とみなせば、ここにも対称性が現れることとなります。

いかがでしたでしょうか。一見バラバラに見える地球惑星科学の諸分野も、数学の道具を通してみると思いがけない一般性を見出すことができます。この記事が少しでも皆様の地学への理解の一助となっていれば幸いです。

※（当記事は締め切りに追われた筆者が泣き叫びながら駆け足で書き上げています。誤植や論理的な誤りを見つけれられた方はぜひ [shotoroapian@ecc.u-tokyo.ac.jp](mailto:shotoroapian@ecc.u-tokyo.ac.jp) までご一報いただけると助かります。）

文責：三田村

## 参考文献

- [1] Stanford University, lecture notes from; Math 220B, "Heat equation" <https://web.stanford.edu/class/math220b/handouts/heateqn.pdf>
- [2] 大山陽介, 徳島大学, 講義資料; 「微分方程式特論」. [https://math0.pm.tokushima-u.ac.jp/~ohyama/lecture/diff\\_eq3/DE3\\_02.pdf](https://math0.pm.tokushima-u.ac.jp/~ohyama/lecture/diff_eq3/DE3_02.pdf)
- [3] 東大先端研 中村・小坂研究室, 「偏西風とその蛇行」. [https://www.atmos.rcast.u-tokyo.ac.jp/nakamura\\_lab/research/research2.html](https://www.atmos.rcast.u-tokyo.ac.jp/nakamura_lab/research/research2.html)
- [4] 気象庁地球環境・海洋部気候情報課, 「季節予報がターゲットとする現象と予測可能性について」. <https://www.jma.go.jp/jma/kishou/minkan/koushu140227/shiryuu.pdf>
- [5] 東京学芸大学気象学研究室, 講義資料; 「渦度方程式」. <http://kishou.u-gakugei.ac.jp/lectures/fluid/doc07.pdf>
- [6] D. C. Agnew, "Earth Tides." <https://booksite.elsevier.com/brochures/geophysics/PDFs/00056.pdf>
- [7] 吉田晶樹 (海洋研究開発機構), 「地球物理学のための球面調和関数ノート」. [https://yoshida-geophys.jp/miscel/legendr\\_ver100.pdf](https://yoshida-geophys.jp/miscel/legendr_ver100.pdf)
- [8] Eliška Zábřanová, Ladislav Hanyk, and Ctirad Matyska, "Matrix Pseudospectral Method for Elastic Tides Modeling of Planetary Bodies." <https://geo.mff.cuni.cz/~matyska/Zabranova-Hanyk-Matyska.pdf>
- [9] 亀山真典, 愛媛大学, 講義資料; 「マントル対流数値シミュレーション概論」より, Appendix E 球面調和関数. <https://earth.sci.ehime-u.ac.jp/~kameyama/mantle/html/A5.html>
- [10] 東京都立大学航空宇宙システム工学科, 講義資料. <https://aeroastro.sd.tmu.ac.jp/hydrodynamics/main/columns/cfd-heat/spherical%20coordinate.pdf>
- [11] 松田卓也・猪坂弘, 「潮汐力と潮汐」. [https://www2.yukawa.kyoto-u.ac.jp/~hiroshi.kunitomo/090413\\_tyoseki.pdf](https://www2.yukawa.kyoto-u.ac.jp/~hiroshi.kunitomo/090413_tyoseki.pdf)
- [12] University of Maryland, lecture notes from; Stellar Dynamics & Structure of Galaxies, "Potential due to thin disk" [https://pages.astro.umd.edu/~rmushotz/ASTR0620/thin\\_disk\\_potential.pdf](https://pages.astro.umd.edu/~rmushotz/ASTR0620/thin_disk_potential.pdf)
- [13] G. N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*. <https://archive.org/details/treatiseontheory00watsuoft/page/440/mode/2up>
- [14] Željko Ivezić, University of Washington, lecture notes from; Astrophysics III: Stellar Dynamics, "Potential Theory II: Multipole Expansion, Potential of Disks" <https://faculty.washington.edu/ivezic/Teaching/Astr509/lecture3.pdf>
- [15] 中村厚, 北里大学, 講義資料; 「物理数学 II: Bessel 関数」. <https://www.kitasato-u.ac.jp/sci/resea/buturi/hisenkei/nakamura/PhysMath-2/PhysMath2-20-12.pdf>
- [16] 齊藤国靖, 京都産業大学, 講義資料; 「ベッセル関数」. <https://www.cc.kyoto-su.ac.jp/~sithuny/lecnotes/calculus/lecture09.pdf>
- [17] Jo Bovy and Hans-Walter Rix, "A direct dynamical measurement of the Milky Way's disk surface density profile, disk scale length, and dark matter profile at  $4 \text{ kpc} < R < 9 \text{ kpc}$ ." <https://arxiv.org/pdf/1309.0809>
- [18] 山下達也, 北海道大学, 「重力値とその補正に関する理論式の導出メモ」. [https://www.ep.sci.hokudai.ac.jp/~yamasita/gravity\\_formula.pdf](https://www.ep.sci.hokudai.ac.jp/~yamasita/gravity_formula.pdf)
- [19] Felipe Linares, Institute for Pure and Applied Mathematics Rio de Janeiro, Brazil, lecture notes from; "The Spectral Theorem." [https://w3.impa.br/~linares/teoria-espectral-2021/lectures-2021/lecture-spectral\\_theorem.pdf](https://w3.impa.br/~linares/teoria-espectral-2021/lectures-2021/lecture-spectral_theorem.pdf)
- [20] Harvard University, Math 212a handout; "The Spectral Theorem for Unbounded Operators." [https://abel.math.harvard.edu/archive/212\\_fall\\_02/handouts/spectralth2.pdf](https://abel.math.harvard.edu/archive/212_fall_02/handouts/spectralth2.pdf)
- [21] Jonas Lampart, Munich University: *Functional Analysis II* Lecture Notes. [https://www.mathematik.uni-muenchen.de/~lampart/FA2\\_WS19\\_Lampart\\_week9.pdf](https://www.mathematik.uni-muenchen.de/~lampart/FA2_WS19_Lampart_week9.pdf)
- [22] Terence Tao, UCLA, lecture notes from; "Lecture Notes 4 for 247A." <https://www.math.ucla.edu/~tao/247a.1.06f/notes4.pdf>

<sup>\*27</sup> もちろん全部が全部それでうまくいくというわけではありませんが…