

地球力学レポート 3

05-242628 三田村彰大

January 26, 2026

問 1

(1)

歳差・章動とは宇宙空間に固定の慣性系から見た地球の向きの変動である。慣性空間に対する地球の姿勢の変動は「定常的な変化の蓄積」+「周期的な小さな変動」によって説明されるが、特に前者を歳差、後者を章動という。また、この地球の姿勢の変動は外部天体から受けるトルクによって生じており、トルクの定常成分に対する応答が歳差であり、トルクの周期成分に対する応答が章動である。

次に極運動とは、地球に固定した座標系から見た地球の自転軸の変動である。これは歳差・章動とは違い地球内部に原因をもち、具体的には地球が楕円体であることによるオイラー周期運動や地球が非剛体であることによる Chandler 周期運動などがある。

(2)

流体核もマントルも軸対称であるから、流体核の慣性モーメントを I_c およびマントルの慣性モーメント I_m はいずれも次のような形で与えられる。

$$I_c = \begin{pmatrix} A_c & 0 & 0 \\ 0 & A_c & 0 \\ 0 & 0 & C_c \end{pmatrix}, \quad I_m = \begin{pmatrix} A_m & 0 & 0 \\ 0 & A_m & 0 \\ 0 & 0 & C_m \end{pmatrix} \quad (1)$$

特に今流体核は球対称であるから、

$$C_c = A_c \quad (2)$$

となる。また地球全体の慣性モーメントが問題文のような I で与えられる時、 $I = I_c + I_m$ であるから

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_c & 0 & 0 \\ 0 & A_c & 0 \\ 0 & 0 & C_c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_m & 0 & 0 \\ 0 & A_m & 0 \\ 0 & 0 & C_m \end{pmatrix} \quad (3)$$

となり、以下を得る。

$$A = A_c + A_m, \quad C = C_c + C_m \quad (4)$$

その上で流体核がある場合とない場合それぞれについて自由振動の周期を求める。まず流体核がない場合だが、授業で扱った内容を思い出せばそのその周期はオイラー周期であり、以下のようになる。

$$T_E = \frac{2\pi}{\sigma_r} = \frac{2\pi A}{(C - A)\Omega} \quad (5)$$

次に流体核がある場合についてだが、いま流体核とマンツルの角速度ベクトル ω_c, ω_m を

$$\omega_c = \Omega_c (m_1^c, m_2^c, 1 + m_3^c)^T \quad (6)$$

$$\omega_m = \Omega_m (m_1^m, m_2^m, 1 + m_3^m)^T \quad (7)$$

のように表した時、いずれも軸対称性を持つ剛体であるから以下の方程式を満たす。

$$A_i \Omega_i \frac{dm_1^i}{dt} + \Omega_i^2 (C_i - A_i) m_2^i = 0 \quad (8)$$

$$A_i \Omega_i \frac{dm_2^i}{dt} - \Omega_i^2 (C_i - A_i) m_1^i = 0 \quad (9)$$

$$C_i \Omega_i^2 \frac{dm_3^i}{dt} = 0 \quad (10)$$

ただし $i = m \vee c$ であり、 $i = m, c$ それぞれについて上の方程式が成立するのは流体核とマンツルに相互作用がないと仮定しているからである。

特に流体核の場合、すなわち $i = c$ の時は $C_c = A_c$ であつたから上式は

$$A_c \Omega_c \frac{dm_1^c}{dt} = 0 \quad (11)$$

$$A_c \Omega_c \frac{dm_2^c}{dt} = 0 \quad (12)$$

$$C_c \Omega_c^2 \frac{dm_3^c}{dt} = 0 \quad (13)$$

となり、結果として $\mathbf{m}^c = \text{const}$ を得る。よつて流体核は極運動をしないとわかり、極運動の周期についてはマンツルのみを考えればいい。その上で、(2) (4) から $C > A$ となる為には $C_m > A_m$ となつていなければならないとわかり、よつて (8)~(10) において $i = m$ とした場合に得られる結果はオイラー周期と同じである。よつてマンツルの極運動の周期が

$$T_m = \frac{2\pi A_m}{(C_m - A_m)\Omega_m} \quad (14)$$

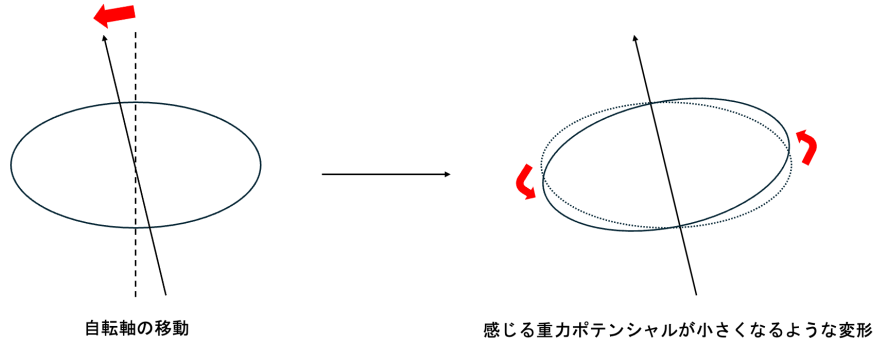
と求まる。特に (2) (4) から $C_m - A_m = C - A$ となる。また一日の長さが流体核がある場合とない場合で変わらなると仮定すると $\Omega_m = \Omega$ となつていなければならない。よつて、

$$T_m = \frac{2\pi A_m}{(C - A)\Omega} = T_E \frac{A_m}{A} = T_E \frac{A - A_c}{A} < T_E \quad (15)$$

となる。先に述べたとおり極運動の周期についてはマンツルの運動のみを考えれば良いから、これがそのまま流体核がある場合の極運動の周期であり、確かに流体核がない場合に比べて短くなつてゐる。

(3)

地球の対称軸を z' 軸とする。いま自転軸 ω が z' 軸から離れると、この「ずれ」を打ち消そうとする復元が働くことで首振りが生じると考えることができる。^{*1}この時もし地球が弾性体であったとすると、自転軸の移動により遠心力ポテンシャルが変化することで変形が生じるが、この変形は物理の自然な要請によりポテンシャルが小さくなる向きに生じるはずである。



よってそれは z' 軸が自転軸に近づくような変形であり、これにより軸の「ずれ」が相殺される。よって剛体に比べて「ずれ」を打ち消そうとする復元が弱くなり、結果として首振りが穏やかになるから周期も長くなると考えられる。

問2

(1)

バネに加わる応力を σ_1 、ダッシュポットに加わる応力を σ_2 として、 $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$ と歪み ε の間の関係を求める。今歪みについて、以下が成立する。

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\sigma_1}{\mu} = \frac{\sigma_2}{\eta} \quad (16)$$

この時、 $\sigma_1 = 0$ の時 $\varepsilon = 0$ という条件から $\varepsilon = \sigma_1/\mu$ が成立する。よって $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = \mu\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon}$ となるから、

$$\sigma = \mu\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon} \quad (17)$$

を得る。

(2)

$\sigma(t) = \sigma_0$ のもとで (17) をラプラス変換すると

$$\frac{\sigma_0}{s} = \mu E(s) + \eta(sE(s) - \varepsilon(0)) \quad (18)$$

^{*1} 非常にぎっくりとした考え方ではあるが、これ以外に説明の仕方が思いつかない...

となる。ただし $\varepsilon(t)$ のラプラス変換を $E(s)$ とした。このとき $\varepsilon(0) = 0$ から、

$$\frac{\sigma_0}{s} = \mu E(s) + \eta s E(s) \quad (19)$$

$$\leadsto E(s) = \frac{\sigma_0}{s} \frac{1}{\mu + \eta s} \quad (20)$$

となり、

$$\frac{\sigma_0}{s} \frac{1}{\mu + \eta s} = \frac{a}{s} + \frac{b}{\mu + \eta s} \quad (21)$$

とおけば

$$a = \frac{\sigma_0}{\mu}, \quad b = -\sigma_0 \frac{\eta}{\mu} \quad (22)$$

とも止まるから、(20) は

$$E(s) = \frac{\sigma_0/\mu}{s} - \frac{\sigma_0/\mu}{s + \mu/\eta} \quad (23)$$

となり、よってラプラス逆変換を考えれば

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{\mu} - \frac{\sigma_0}{\mu} \exp\left(-\frac{\mu}{\eta}t\right) \quad (24)$$

を得る。

問3

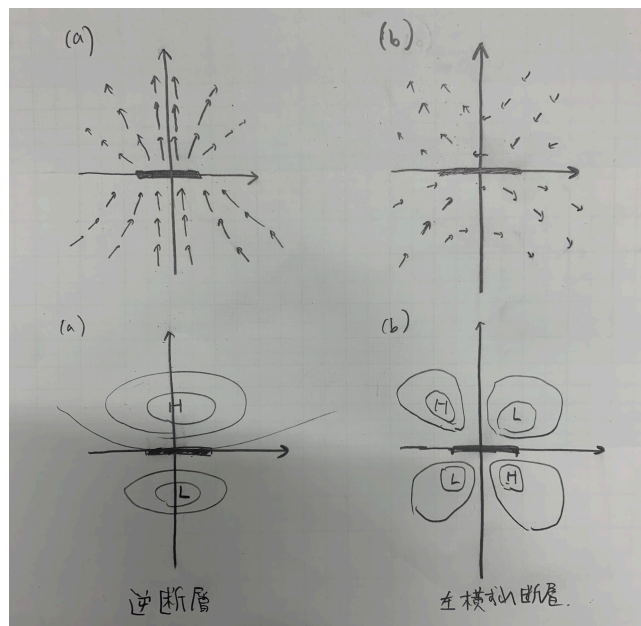


Figure1: 水平変位と隆起・沈降の図。上が水平変位を表すベクトル、下が隆起・沈降を表す contour で、H が隆起、L が沈降を表す。