地球力学レポート課題２

05-242628 三田村彰大

December 22, 2025

問１

(A) 天球　(B) VLBI　(C) クエーサー　(D) SLR　(E) 焦点　(F) 地球　(G) 準拠楕円体　(H) ジオイド　(I) セシウム　(J) UT1　(K) TCG　(L) 重力赤方偏移

問２

（１）

潮汐力の定義：ある天体が別の天体に及ぼす引力のうち、公転運動への寄与を引いた分

（２）

今、 $\cos\psi = \cos\theta_P \cos\theta_M + \sin\theta_P \sin\theta_M \cos(\phi_P - \phi_M)$ が満たされる時、以下の球面調和関数の加法定理が従う。

$$P_n(\cos\psi) = \sum_{m=0}^{n} A_{n,m} P_{n,m}(\cos\theta_P) P_{n,m}(\cos\theta_M) \cos(m(\phi_P - \phi_M)) \tag{1}$$

$$A_{n,0} = 1\ ,\ A_{n,m} = 2\frac{(n-m)!}{(n+m)!} \tag{2}$$

特に $n = 2$ の場合を考えれば、

$$\begin{aligned} P_2(\cos\psi) &= P_{2,0}(\cos\theta_P) P_{2,0}(\cos\theta_M) & (3)\\ &+ \frac{1}{3} P_{2,1}(\cos\theta_P) P_{2,1}(\cos\theta_M) \cos(\phi_P - \phi_M) & (4)\\ &+ \frac{1}{12} P_{2,2}(\cos\theta_P) P_{2,2}(\cos\theta_M) \cos(2(\phi_P - \phi_M)) & (5) \end{aligned}$$

となる。

※ ここに

$$P_{2,0}(x) = \frac{3x^2 - 1}{2} \tag{6}$$

$$P_{2,1}(x) = -3x\left(1 - x^2\right)^{1/2} \tag{7}$$

$$P_{2,2}(x) = 3\left(1 - x^2\right) \tag{8}$$

を代入すれば、[*1]

$$P_2(\cos\psi) = \frac{1}{2}\left(3\cos^2\theta_P - 1\right)\left(3\cos^2\theta_M - 1\right) \tag{9}$$

$$+ \frac{3}{4}\sin 2\theta_P \sin 2\theta_M \cos(\phi_P - \phi_M) \tag{10}$$

$$+ \frac{3}{4}\sin^2\theta_P \sin^2\theta_M \cos(2(\phi_P - \phi_M)) \tag{11}$$

となり、授業で与えられた式に帰着することができる

この時、θ_P, ϕ_P を地球の緯度・経度、θ_M, ϕ_M を月（あるいは太陽）の赤緯・赤経とみなせば潮汐ポテンシャルは

$$V_3 = -\zeta g P_2(\cos\psi) \tag{12}$$

で与えられるのであったから、(3)〜(5) がそれぞれ潮汐変動の 3 つの周期帯に対応する。今、θ_M は 27.3 日（太陽の場合は 365 日）の周期で変動し、$\psi_P - \psi_M$ はおよそ 1 日周期で変動することがわかっているので、$P_2(\cos\psi)$ の式の各項に現れる一番小さい周期成分を観察することで各項の変動周期を判断することができる。よって $\cos x$ が x の周期の半分で変動することに注意すれば、(3) の項は θ_M の周期の半分の周期で変動する長周期潮に、(4) の項は $\psi_P - \psi_M$ の周期の半分の周期で運動する日周潮に、(5) の項は $\psi_P - \psi_M$ の周期の 1/4 の周期で運動する半日周潮にそれぞれ対応することがわかる。よって（時）空間パターンに対応する球面調和関数 $Y_{n,m}$ の次数 n・位数 m はルジャンドル陪多項式 $P_{n,m}$ の次数・位数がそのまま対応するから、

$$\text{日周潮} \quad \cdots \quad n = 2, m = 1 \tag{13}$$

$$\text{半日周潮} \quad \cdots \quad n = 2, m = 2 \tag{14}$$

$$\text{長周期潮} \quad \cdots \quad n = 2, m = 0 \tag{15}$$

のように求めたかった n, m が求まる。

（3）

固体地球潮汐とは、月及び太陽により加えられた潮汐力によって殻やマントルなどの固体部分が弾性的[*2]に変形する現象であり、「潮汐力の変化」→「地球固体部が変形＆変形により重力場が変化」という物理プロセスが周期的に生じる。

対して海洋潮汐は月・及び太陽により作られる潮汐ポテンシャルに対し海洋が等ポテンシャル面を作ろうとする現象であり、実際の大陸の形状や摩擦などの影響が加わることで浅水波が生じる物理プロセスである。こちらも、天体の周期的な運動により周期性をもつ。

よって、いずれの物理プロセスも同じ潮汐力によって駆動される周期的な物理現象であるが、固体地球潮汐は弾性対力学に従う固体の変形であるのに対し海洋潮汐は流体力学に従う流体運動であるという違いがある。

---

*1 参照：[2]

*2 実際には粘弾性もあると思われる

問3

より深い洞察を得るために、一般に $n \geq 2$ での起潮力ポテンシャルに対して剛体地球と弾性体の場合の重力変化の関係を求めることにする。また、次のような記号を用いることにする。

$$(r, \theta, \phi) \quad \cdots \quad \text{地球重心を原点とする球面座標系} \tag{16}$$

$$M \quad \cdots \quad \text{地球質量} \tag{17}$$

$$m_s \quad \cdots \quad \text{月（あるいは太陽）の質量} \tag{18}$$

$$R_p \quad \cdots \quad \text{球体地球の半径} \tag{19}$$

$$a \quad \cdots \quad \text{地球重心と月（あるいは太陽）中心間の距離} \tag{20}$$

まず、球体地球の地球外部でのポテンシャルを $\Phi_0(r)$ とする。すなわち

$$\Phi_0 = -\frac{GM}{r} \tag{21}$$

である。この時、潮汐ポテンシャル V_t 及び潮汐変形によるポテンシャル変化 W が生じ、ポテンシャルが

$$\Phi_0 + V_t + W \tag{22}$$

となった場合を考え、この時の地球表面で観測される重力変化を求める。[*3]ただし、初め重力計は (R_p, θ_P, ϕ_P) に置かれていたとし、地球の変形により (r, θ, ϕ) に移動したものとする。またこの時、$h \ll R_p$ を満たす $h(\theta_P, \phi_P)$ に対し、座標原点からの距離の変化が

$$r = R_p + h(\theta_P, \phi_P) \tag{23}$$

と書けるものとする。さらに、変形は十分小さく変形後の地球の形状は球形と見做せるとする。すなわち、動径方向の変位が $u_r \approx h(\theta_P, \phi_P)$ と書け、$(\theta, \phi) = (\theta_P, \phi_P)$ であるものとする。

以上の仮定のもとで測定される重力変化を計算する。

まず、変形前に測定される重力の大きさ g_0 は

$$g_0 = \left.\frac{\partial}{\partial r}\Phi_0(r)\right|_{R_p} = \frac{GM}{R_p^2} \tag{24}$$

である。次に、変形後に測定される重力の大きさ g についてであるが、今変形は十分小さく変形後の重力の方向は依然として重心方向を向いていると見做せば、

$$g = \left|-\nabla(\Phi_0 + V_t + W)\right| \approx \left.\frac{\partial}{\partial r}(\Phi_0 + V_t + W)\right|_{r,\theta,\phi} \tag{25}$$

[*3] ただし（22）式では遠心力や月の向心力のポテンシャルを 0 と置いていることに注意。これらは潮汐変形により変化しないと近似的に見なすことにする。

であると考えられる。よってまずは（25）の右辺第一項について考えると、これは以下のように計算できる。

$$\left.\frac{\partial}{\partial r}\Phi_0\right|_{r,\theta,\phi} = \left.\frac{GM}{r^2}\right|_{r,\theta,\phi} \tag{26}$$

$$= \left.\frac{GM}{r^2}\right|_{R_p+h,\theta_P,\phi_P} \tag{27}$$

$$= \frac{GM}{R_p^2}\left\{1-\frac{2}{R_p}h\left(\theta_P,\phi_P\right)+\mathcal{O}\left(h^2\right)\right\} \tag{28}$$

[*4]今、$\mathcal{O}\left(h^2\right)$ は十分小さいと見做して無視することにする。またさらに、$h\left(\theta_P,\phi_P\right)$ を球面調和展開する。

$$h\left(\theta_P,\phi_P\right)=\sum_{n\geq 2}A_{nm}Ynm\left(\theta_P,\phi_P\right)=\sum_{n\geq 2}H_n\left(\theta_P,\phi_P\right) \tag{29}$$

ただし、総和について $n\geq 2$ としたのは、$n=0$ が球体地球半径の均一変化に対応し非圧縮条件においては無視できること、$n=1$ が地球の平行移動に対応し座標の取り方によって 0 とできることなどから従う。よって $g_0=GM/R_p^2$ を用いれば、（25）の右辺第一項は

$$\left.\frac{\partial}{\partial r}\Phi_0\right|_{r,\theta,\phi}=g_0-2\,\frac{g_0}{R_p}\sum_{n\geq 2}H_n \tag{30}$$

となる。

次に（25）の右辺第二項について考える。今観測点と月中心の距離を Δ とすれば、月が観測点に作るポテンシャルは

$$V_s=-G\frac{m_s}{\Delta} \tag{31}$$

である。この時、講義と同様に観測点と月のなす角を ψ で表せば、$\Delta=\sqrt{r^2+a^2-2ra\cos\psi}$ であるから Δ^{-1} は球面調和展開できて、

$$V_s=-\frac{Gm_s}{a}\sum_{n=0}\left(\frac{r}{a}\right)^n P_n\left(\cos\psi\right) \tag{32}$$

となる。特に、公転運動に寄与するポテンシャルを無視することで、潮汐ポテンシャルを以下のように得る。

$$V_t=-\frac{Gm_s}{a}\sum_{n\geq 2}\left(\frac{r}{a}\right)^n P_n\left(\cos\psi\right) \tag{33}$$

さらに、変形前の球体地球表面における潮汐ポテンシャルを考えると、以下のようになる。

$$V_t^0=\sum_{n\geq 2}\left\{-\frac{Gm_s}{a}\left(\frac{R_p}{a}\right)^n P_n\left(\cos\psi\right)\right\}=\sum_{n\geq 2}V_t^n \tag{34}$$

ただし上の式で

$$V_t^n=-\frac{Gm_s}{a}\left(\frac{R_p}{a}\right)^n P_n\left(\cos\psi\right) \tag{35}$$

[*4] ただし途中でテイラー展開を用いた。

であり、これは n 次の起潮力ポテンシャルである。[*5] よってこれを用いれば（25）の右辺第二項は

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial}{\partial r}V_t\right|_{r,\theta,\phi} &= \left.-\frac{Gm_s}{a}\sum_{n\geq 2} n\frac{r^{n-1}}{a^n}P_n\left(\cos\psi\right)\right|_{R_p+h,\theta,\phi} && (36)\\
&= -\frac{Gm_s}{a}\sum_{n\geq 2}\frac{n}{R_p}P_n\left(\cos\psi\right)\left\{\left(\frac{R_p}{a}\right)^n+(n-1)\left(\frac{R_p}{a}\right)^{n-1}\frac{h}{a}+\mathcal{O}\left(h^2\right)\right\} && (37)\\
&\approx -\frac{Gm_s}{a}\sum_{n\geq 2}\frac{n}{R_p}P_n\left(\cos\psi\right)\left(\frac{R_p}{a}\right)^n && (38)\\
&= \sum_{n\geq 2}\frac{n}{R_p}\left(-\frac{Gm_s}{a}\left(\frac{R_p}{a}\right)^n P_n\left(\cos\psi\right)\right) && (39)\\
&= \sum_{n\geq 2}\frac{n}{R_p}V_t^n && (40)
\end{aligned}$$

と計算される。

最後に（25）の右辺第三項を考える。今、潮汐変形に伴うポテンシャルの変化はディリクレ問題の解として与えられ、これは講義スライドに与えられた通りである。よって今観測装置は地球外部に存在していることに注意すれば

$$W = -4\pi G\rho R_p\sum_{n\geq 2}\left(\frac{R_p}{r}\right)^{n+1}\frac{H_n}{2n+1} \tag{41}$$

のようになる。特に、$r = R_p$ でのポテンシャルは

$$W_s = \sum_{n\geq 2}\left\{-4\pi G\rho R_p\frac{H_n}{2n+1}\right\} = \sum_{n\geq 2}W_n \tag{42}$$

となる。ただし上の式で

$$W_n = -4\pi G\rho R_p\frac{H_n}{2n+1} \tag{43}$$

[*5] $n = 2$ を代入すれば授業で用いた 2 次の起潮力ポテンシャルを得る。

であり、これは潮汐に伴う二次なポテンシャルの第 n 次の項である。よってこれを用いれば、(25) の右辺第三項は

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial}{\partial r}W\right|_{r,\theta,\phi} &= \left.-4\pi G\rho R_p \sum_{n\geq 2}\left\{-(n+1)\frac{R_p^{n+1}}{r^{n+2}}\frac{H_n}{2n+1}\right\}\right|_{R_p+h,\theta,\phi} & (44)\\
&= -4\pi G\rho R_p \sum_{n\geq 2}\left\{-(n+1)R_p^{n+1}\frac{H_n}{2n+1}\left(\frac{1}{R_p^{n+2}}-(n+2)\frac{h}{R_p^{n+3}}+\mathcal{O}\left(h^2\right)\right)\right\} & (45)\\
&\approx -4\pi G\rho R_p \sum_{n\geq 2}\left\{-(n+1)R_p^{n+1}\frac{H_n}{2n+1}\frac{1}{R_p^{n+2}}\right\} & (46)\\
&= \sum_{n\geq 2}\left(-\frac{n+1}{R_p}\right)\left(-4\pi G\rho R_p\frac{H_n}{2n+1}\right) & (47)\\
&= \sum_{n\geq 2}\left(-\frac{n+1}{R_p}W_n\right) & (48)
\end{aligned}$$

となる。

よって以上の計算から、(25) 式は

$$\begin{aligned}
g &= \left.\frac{\partial}{\partial r}\left(\Phi_0+V_t+W\right)\right|_{r,\theta,\phi} & (49)\\
&= g_0 - 2\frac{g_0}{R_p}\sum_{n\geq 2}H_n + \sum_{n\geq 2}\frac{n}{R_p}V_t^n + \sum_{n\geq 2}\left(-\frac{n+1}{R_p}W_n\right) & (50)
\end{aligned}$$

となる。ここで、一般の n 次に対するラブ数 h_n の定義を n 次の起潮力ポテンシャルに対する変位の線形応答として与える。すなわち、

$$u_r = \sum_{n\geq 2}\left(-h_n\frac{V_t^n}{g_0}\right) \tag{51}$$

である。[*6] この時 $u_r = h = \sum_{n\geq 2} H_n$ であったことを思い出せば、

$$H_n = -h_n\frac{V_t^n}{g_0} \tag{52}$$

を得る。また、一般の n 次に対するラブ数 k_n の定義は同様に n 次の起潮力ポテンシャルに対する二次ポテンシャルの線形応答として与えることにする。この時、

$$W_n = k_n V_t^n \tag{53}$$

[*6] マイナスがついているのは、ポテンシャルを負にとっているから。

となる。よってこれらを（50）に代入することで以下を得る。

$$
\begin{aligned}
g &= g_0 + \sum_{n\geq 2} \frac{2}{R_p} h_n V_t^n + \sum_{n\geq 2} \frac{n}{R_p} V_t^n - \sum_{n\geq 2} \frac{n+1}{R_p} k_n V_t^n && (54)\\
&= g_0 + \sum_{n\geq 2} \left(\frac{n}{R_p} V_t^n \right) \left(1 - \frac{n+1}{n} k_n + \frac{2}{n} h_n \right) && (55)
\end{aligned}
$$

よって求めたかった重力変化が

$$
\Delta g_{弾} = g - g_0 = \sum_{n\geq 2} \left(\frac{n}{R_p} V_t^n \right) \left(1 - \frac{n+1}{n} k_n + \frac{2}{n} h_n \right) = \sum_{n\geq 2} \Delta g_{弾}^n \tag{56}
$$

と求まる。ただし、$\Delta g_{弾}$ は n 次の起潮力ポテンシャルに対応した重力変化である。また、地球が剛体だった場合の重力変化は $h_n = k_n = 0$ とすることで求まり、

$$
\Delta g_{剛} = \sum_{n\geq 2} \frac{n}{R_p} V_t^n = \sum_{n\geq 2} \Delta g_{剛}^n \tag{57}
$$

となる。ただし $\Delta g_{剛} = \frac{n}{R_p} V_t^n$ である。よってこれを（56）に代入することで地球が弾性変形するときの重力変化と地球が剛体変形する場合の重力変化の関係が求まり、

$$
\Delta g_{弾}^n = \left(1 - \frac{n+1}{n} k_n + \frac{2}{n} h_n \right) \Delta g_{剛}^n \tag{58}
$$

となる。最後に $n = 2$ を代入すれば、特に今回問われている二次の起潮力ポテンシャルが支配的な場合についての解が得られ、

$$
\Delta g_{弾}^2 = \left(1 - \frac{3}{2} k_2 + h_2 \right) \Delta g_{剛}^2 \tag{59}
$$

題意を示すことができる。

References

[1] https://tmurphy.physics.ucsd.edu/apollo/doc/tides.pdf

[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Associated_Legendre_polynomial