上級数理統計Ⅰレポート1

05242628 三田村彰大

Thm B

今、次のように定める

$$\theta(F) \quad : \quad \text{unbiasedly estimable of degree } k, \text{ kernel } \psi \tag{1}$$

$$\psi_c(x_1, \cdots, x_c) \coloneqq \mathbb{E}\left[\psi(x_1, \cdots, x_c, X_{c+1}, \cdots, X_k)\right] \qquad \left(X_{c+1}, \cdots, X_k \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} F\right) \tag{2}$$

$$\sigma_c^2 \coloneqq \mathrm{Var}\left[\psi_c(X_1, \cdots, X_c)\right] \qquad \left(X_1, \cdots, X_c \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} F\right) \tag{3}$$

また、S_1, S_2 を次のように定める。

$$\begin{cases} S_1 = \left(s_1^1, \cdots, s_k^1\right) \subseteq \{1, \cdots, n\} \\ S_2 = \left(s_1^2, \cdots, s_k^2\right) \subseteq \{1, \cdots, n\} \end{cases} \quad ; \quad S_1, S_2 \text{ は} c \text{ 個の共通要素を持つ} \tag{4}$$

この時、$\psi(S_1) \coloneqq \psi(X_{s_1^1}, \cdots, X_{s_k^1})$、$\psi(S_2) \coloneqq \psi(X_{s_1^2}, \cdots, X_{s_k^2})$ のように定めるとき、$\sigma_c^2 = \mathrm{Cov}\left[\psi(S_1), \psi(S_2)\right]$ が成り立つことを示す。

proof

S_1, S_2 の定義と、ψ が symmetric であることから、S_1, S_2 のうち c 個の共通要素を明示的に書いて $\psi(S_1) = \psi(X_{s_1^1}, \cdots, X_{s_k^1}) = \psi(X_1, \cdots, X_c, X_{c+1}, \cdots, X_k)$ 、$\psi(S_2) = \psi(X_{s_1^2}, \cdots, X_{s_k^2}) = \psi(X_1, \cdots, X_c, X_{k+1}, \cdots, X_{2k-c})$ と書いて良い。この時、

$$\sigma_c^2 = \mathbb{E}\left[\psi_c(X_1, \cdots, X_c)^2\right] - \mathbb{E}\left[\psi_c(X_1, \cdots, X_c)\right]^2 \tag{5}$$

であり、第二項については ThmA(ii) より

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\psi_c(X_1, \cdots, X_c)\right]^2 &= \mathbb{E}\left[\psi(X_1, \cdots, X_k)\right]^2 \\ &= \mathbb{E}\left[\psi(X_1, \cdots, X_k)\right] \mathbb{E}\left[\psi(X_1, \cdots, X_c, X_{k+1}, \cdots, X_{2k-c})\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\psi(S_1)\right] \mathbb{E}\left[\psi(S_2)\right] \end{aligned} \tag{6}$$

となる。また、第一項については、

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\psi_c(X_1, \cdots, X_c)^2\right] &= \mathbb{E}_x\left[\mathbb{E}_Y\left[\psi(X_1, \cdots, X_c, Y_{c+1} \cdots, Y_k)\right]^2\right] \\ &= \mathbb{E}_{X_1, \cdots, X_c}\Big[\mathbb{E}_{X_{c+1}, \cdots, X_k}\left[\psi(X_1, \cdots, X_c, X_{c+1}, \cdots, X_k)\right] \\ &\qquad \mathbb{E}_{X_{k+1}, \cdots, X_{2k-c}}\left[\psi(X_1, \cdots, X_c, X_{k+1}, \cdots, X_{2k-c})\right]\Big] \\ &= \mathbb{E}\left[\psi(X_1, \cdots, X_k)\, \psi(X_1, \cdots, X_c, X_{k+1}, \cdots, X_{2k-c})\right] \end{aligned}$$

$$= \mathbb{E}\left[\psi(S_1)\psi(S_2)\right] \tag{7}$$

となる。よって、$\sigma_c^2 = \mathbb{E}\left[\psi(S_1)\psi(S_2)\right] - \mathbb{E}\left[\psi(S_1)\right]\mathbb{E}\left[\psi(S_2)\right] = \mathrm{Cov}\left[\psi(S_1)\,,\,\psi(S_2)\right]$ を得る。

□

Thm C

今、次のように定める

$$\theta(F) \quad : \quad \text{unbiasedly estimable of degree } k\text{, kernel } \psi \tag{8}$$

$$\psi_c\left(x_1,\cdots,x_c\right) \coloneqq \mathbb{E}\left[\psi\left(x_1,\cdots,x_c,X_{c+1},\cdots,X_k\right)\right] \qquad \left(X_{c+1},\cdots,X_k \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} F\right) \tag{9}$$

$$\sigma_c^2 \coloneqq \mathrm{Var}\left[\psi_c\left(X_1,\cdots,X_c\right)\right] \qquad \left(X_1,\cdots,X_c \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} F\right) \tag{10}$$

この時、θ の U 統計量 $U_n = \binom{n}{k}^{-1}\sum_{(n,k)}\psi\left(X_{j_1},\cdots,X_{j_k}\right)$ について、$\mathrm{Var}\left[U_n\right] = \binom{n}{k}^{-1}\sum_{c=1}^{k}\binom{k}{c}\binom{n-k}{k-c}\sigma_c^2$ となることを示す。[*1]

proof

今一般に $X_i \sim F_i$ なる確率変数に対して $\mathrm{Var}\left[a\sum_i f(X_i)\right] = a^2\sum_{i,j}\mathrm{Cov}\left[f(X_i)\,,\,f(X_j)\right]$ である。（ただし $\mathrm{Cov}\left[f(X_i)\,,\,f(X_i)\right] = \mathrm{Var}\left[f(X_i)\right]$。）よって、

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}\left[U_n\right] &= \mathrm{Var}\left[\binom{n}{k}^{-1}\sum_{(n,k)}\psi\left(X_{j_1},\cdots,X_{j_k}\right)\right] \\
&= \binom{n}{k}^{-2}\sum_{\substack{1\le i_1<\cdots<i_k\le n \\ 1\le j_1<\cdots<j_k\le n}}\mathrm{Cov}\left[\psi\left(X_{i_1},\cdots,X_{i_k}\right)\,,\,\psi\left(X_{j_1},\cdots,X_{j_k}\right)\right] \\
&= \binom{n}{k}^{-2}\sum_{c=0}^{k}\sum_{\substack{S_1=(s_1^1,\cdots,s_k^1)\subseteq\{1,\cdots,n\} \\ S_2=(s_1^2,\cdots,s_k^2)\subseteq\{1,\cdots,n\} \\ S_1,S_2\text{は } c \text{ 個の共通要素を持つ}}}\mathrm{Cov}\left[\psi\left(X_{s_1^1},\cdots,X_{s_k^1}\right)\,,\,\psi\left(X_{s_1^2},\cdots,X_{s_k^2}\right)\right]
\end{aligned} \tag{12}$$

となる。[*2] よって今 ThmB の時と同様の記法を採用すれば $\mathrm{Var}\left[U_n\right] = \binom{n}{k}^{-2}\sum_{c=0}^{k}\sum_{S_1,S_2}\mathrm{Cov}\left[\psi(S_1)\,,\,\psi(S_2)\right]$ であり、ThmB より $\mathrm{Cov}\left[\psi(S_1)\,,\,\psi(S_2)\right]$ は S_1, S_2 の取り方によらずその共通要素の数 c だけで決まり $\mathrm{Cov}\left[\psi(S_1)\,,\,\psi(S_2)\right] = \sigma_c^2$ となる。よって $\mathrm{Var}\left[U_n\right] = \binom{n}{k}^{-2}\sum_{c=0}^{k}\sum_{S_1,S_2}\sigma_c^2$ となる。さらに、c 個の共通要素を持つような (S_1,S_2) の選び方は $\binom{n}{c}\binom{n-c}{k-c}\binom{n-k}{k-c}$ 通りなので[*3]、

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}\left[U_n\right] &= \binom{n}{k}^{-2}\sum_{c=0}^{k}\binom{n}{c}\binom{n-c}{k-c}\binom{n-k}{k-c}\sigma_c^2 \\
&= \binom{n}{k}^{-1}\sum_{c=0}^{k}\left(\frac{n!}{(n-k)!\,k!}\right)^{-1}\frac{n!}{(n-c)!\,c!}\frac{(n-c)!}{(n-k)!\,(k-c)!}\binom{n-k}{k-c}\sigma_c^2
\end{aligned}$$

[*1] ただし $\sum_{(n,k)}$ は次のように定める。

$$\sum_{(n,k)}\psi\left(X_{j_1},\cdots,X_{j_k}\right) = \sum_{1\le j_1<\cdots<j_k\le n}\psi\left(X_{j_1},\cdots,X_{j_k}\right) \tag{11}$$

[*2] (12) への変形については、総和について $(i_1,\cdots,i_k),(j_1,\cdots,j_k)$ の共通する要素の数 c について先に和をとることを考えている。

[*3] c 個の共通要素の選び方が $\binom{n}{c}$ 通り、S_1 の非共通要素の選びかたが $\binom{n-c}{k-c}$ 通りで、残された $n-k$ 要素から S_2 の非共通要素 $k-c$ 個を選ぶ選び方が $\binom{n-k}{k-c}$ 通りであることから導ける。

$$= \binom{n}{k}^{-1} \sum_{c=1}^{k} \binom{k}{c}\binom{n-k}{k-c}\sigma_c^2 \tag{13}$$

となる。[*4]

□

Thm D

今、次のように定める。

$$\theta(F) \quad : \quad \text{unbiasedly estimable of degree } k, \text{ kernel } \psi \tag{14}$$

$$\psi_c(x_1, \cdots, x_c) := \mathbb{E}\left[\psi(x_1, \cdots, x_c, X_{c+1}, \cdots, X_k)\right] \qquad \left(X_{c+1}, \cdots, X_k \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} F\right) \tag{15}$$

また、kernel $h^{(1)}, \cdots, h^{(k)}$ を次のように帰納的に定める。

$$h^{(1)}(x_1) := \psi_1(x_1) - \theta \tag{16}$$

$$h^{(c)}(x_1, \cdots, x_c) := \psi_c(x_1, \cdots, x_c) - \sum_{j=1}^{c-1} \sum_{(c,j)} h^{(j)}\left(x_{l_1}, \cdots, x_{l_j}\right) - \theta \tag{17}$$

この時、θ の U 統計量 $U_n = \binom{n}{k}^{-1} \sum_{(n,k)} \psi(X_{j_1}, \cdots, X_{j_k})$ について $\mathrm{Var}[U_n] = \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j}^2 \binom{n}{j}^{-1} \delta_j^2$ となることを示す。(ただし $\delta_j^2 = \mathrm{Var}\left[h^{(j)}(X_1, \cdots, X_j)\right]$。)

proof

今 $h^{(1)}, \cdots, h^{(k)}$ は、$U_n = \theta + \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} \left[\binom{n}{j}^{-1} \sum_{(n,j)} h^{(j)}\left(X_{\nu_1}, \cdots, X_{\nu_j}\right)\right]$ のようにして U_n の H-decomposition を与える。よってこの時、$\mathrm{Var}[U_n]$ は次のように計算することができる。[*5]

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}[U_n] &= \mathbb{E}\left[\left(U_n - \mathbb{E}[U_n]\right)^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(U_n - \theta\right)^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j}\binom{n}{j}^{-1} \sum_{(n,j)} h^{(j)}\left(X_{\nu_1}, \cdots, X_{\nu_j}\right)\right)^2\right] \\
&= \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{k} \binom{k}{j}\binom{n}{j}^{-1}\binom{k}{i}\binom{n}{i}^{-1} \mathbb{E}\left[\sum_{(n,j)} h^{(j)}\left(X_{\nu_1}, \cdots, X_{\nu_j}\right) \sum_{(n,i)} h^{(i)}\left(X_{\lambda_1}, \cdots, X_{\lambda_i}\right)\right] \\
&= \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j}^2 \binom{n}{j}^{-2} \mathbb{E}\left[\sum_{(n,j)} h^{(j)}\left(X_{\nu_1}, \cdots, X_{\nu_j}\right)^2\right] \\
&\qquad + 2\sum_{i<j} \binom{k}{j}\binom{n}{j}^{-1}\binom{k}{i}\binom{n}{i}^{-1} \mathbb{E}\left[\sum_{(n,j)} h^{(j)}\left(X_{\nu_1}, \cdots, X_{\nu_j}\right) \sum_{(n,i)} h^{(i)}\left(X_{\lambda_1}, \cdots, X_{\lambda_i}\right)\right]
\end{aligned}$$

[*4] ※ 清書中に気づいた不備：手書きの方では総和を $c = 0$ から始めてしまっているが、$\sigma_0^2 = 0$ より総和は $c = 1$ からとなる。

[*5] ※ 清書中に気づいた不備：4 行目から 4 行目の変形で ν と λ の選び方が一致しない時に $\mathbb{E}\left[h^{(j)}\left(X_{\nu_1}, \cdots, X_{\nu_j}\right) h^{(j)}\left(X_{\lambda_1}, \cdots, X_{\lambda_j}\right)\right] = 0$ となることを暗に使ってしまっているが、のちに示す（22）を $i = j$ の場合に考えればこれの成立はすぐに示せる。

$$= \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j}^2 \binom{n}{j}^{-1} \mathbb{E}\left[h^{(j)}\left(X_1, \cdots, X_j\right)^2\right] \tag{18}$$
$$+ 2 \sum_{i<j} \binom{k}{j} \binom{n}{j}^{-1} \binom{k}{i} \binom{n}{i}^{-1} \sum_{(n,j)} \sum_{(n,i)} \mathbb{E}\left[h^{(j)}\left(X_{\nu_1}, \cdots, X_{\nu_j}\right) h^{(i)}\left(X_{\lambda_1}, \cdots, X_{\lambda_i}\right)\right]$$

ここでまず（18）の第一項について考える。そのために先に任意の c に対して $\mathbb{E}\left[h^{(c)}\left(X_1, \cdots, X_c\right)\right] = 0$ となることを帰納的に示す。まず $c = 1$ の時は

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[h^{(1)}\left(X_1\right)\right] &= \mathbb{E}\left[\psi_1\left(X_1\right) - \theta\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\psi_1\left(X_1\right)\right] - \theta \\ &= \mathbb{E}\left[\psi\left(X_1, \cdots, X_k\right)\right] - \theta \\ &= 0 \end{aligned} \tag{19}$$

となる。（ただし途中で ThmA(ii) を使った。）次に、$\forall c' \leq c$ で $\mathbb{E}\left[h^{(c')}\left(X_1, \cdots, X_{c'}\right)\right] = 0$ となっている時を考える。この時、

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[h^{(c+1)}\left(X_1, \cdots, X_{c+1}\right)\right] &= \mathbb{E}\left[\psi_{c+1}\left(X_1, \cdots, X_{c+1}\right) - \sum_{j=1}^{c} \sum_{(c+1,j)} h^{(j)}\left(X_{l_1}, \cdots, X_{l_j}\right) - \theta\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\psi_{c+1}\left(X_1, \cdots, X_{c+1}\right)\right] - \sum_{j=1}^{c} \sum_{(c+1,j)} \mathbb{E}\left[h^{(j)}\left(X_{l_1}, \cdots, X_{l_j}\right)\right] - \theta \end{aligned} \tag{20}$$

であり、ThmA(ii) より $\mathbb{E}\left[\psi_{c+1}\left(X_1, \cdots, X_{c+1}\right)\right] = \mathbb{E}\left[\psi\left(X_1, \cdots, X_k\right)\right] = \theta$、帰納法の仮定より $\mathbb{E}\left[h^{(j)}\left(X_{l_1}, \cdots, X_{l_j}\right)\right] = \mathbb{E}\left[h^{(j)}\left(X_1, \cdots, X_j\right)\right] = 0$ $(\forall j \leq c)$ となっているから、$\mathbb{E}\left[h^{(c+1)}\left(X_1, \cdots, X_{c+1}\right)\right] = 0$ となる。よって任意の c に対して $\mathbb{E}\left[h^{(c)}\left(X_1, \cdots, X_c\right)\right] = 0$ となることが言えた。これにより、（18）の第一項は

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} \binom{k}{j}^2 \binom{n}{j}^{-1} \mathbb{E}\left[h^{(j)}\left(X_1, \cdots, X_j\right)^2\right] \\ &= \sum_{j=1}^{n} \binom{k}{j}^2 \binom{n}{j}^{-1} \mathbb{E}\left[\left(h^{(j)}\left(X_1, \cdots, X_j\right) - \mathbb{E}\left[h^{(j)}\left(X_1, \cdots, X_j\right)\right]\right)^2\right] \\ &= \sum_{j=1}^{n} \binom{k}{j}^2 \binom{n}{j}^{-1} \mathrm{Var}\left[h^{(j)}\left(X_1, \cdots, X_j\right)\right] \\ &= \sum_{j=1}^{n} \binom{k}{j}^2 \binom{n}{j}^{-1} \delta_j^2 \end{aligned} \tag{21}$$

となる。よって、第一項の形から、（18）の第二項が 0 となれば題意は示される。より詳細には、$\forall i < j$ に対し

$$\forall_{\substack{1 \leq \nu_1 < \cdots < \nu_j \leq n \\ 1 \leq \lambda_1 < \cdots < \lambda_i \leq n}} \ ; \ \mathbb{E}\left[h^{(j)}\left(X_{\nu_1}, \cdots, X_{\nu_j}\right) h^{(i)}\left(X_{\lambda_1}, \cdots, X_{\lambda_i}\right)\right] = 0 \tag{22}$$

を示せば良い。特に今、$i < j$ より $^{\exists} X_{\nu_p} \notin \{X_{\lambda_1}, \cdots, X_{\lambda_i}\}$ であるから、そのような ν_p を抜き出して $\nu_1 \sim \nu_j$ を並べ替えて $\left(X_{\nu_1}, \cdots, X_{\nu_j}\right) = \left(X_{\nu'_1}, \cdots, X_{\nu'_{j-1}}, X_{\nu_p}\right)$ などと書けば、

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[h^{(j)}\left(X_{\nu_1}, \cdots, X_{\nu_j}\right) h^{(i)}\left(X_{\lambda_1}, \cdots, X_{\lambda_i}\right)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[h^{(j)}\left(X_{\nu'_1}, \cdots, X_{\nu'_{j-1}}, X_{\nu_p}\right) h^{(i)}\left(X_{\lambda_1}, \cdots, X_{\lambda_i}\right)\right] \end{aligned}$$

$$= \mathbb{E}_X \left[\underbrace{\mathbb{E}_Y \left[h^{(j)} \left(X_{\nu'_1}, \cdots, X_{\nu'_{j-1}}, Y \right) \right]} h^{(i)} \left(X_{\lambda_1}, \cdots, X_{\lambda_i} \right) \right] \tag{23}$$

となる。よって、(23) の波線部が 0 となることを示せば十分で、それはすなわち以下を示すことを意味する。

$$^{\forall} j \; ; \; \mathbb{E} \left[h^{(j)} \left(x_1, \cdots, x_{j-1}, X_j \right) \right] = 0 \tag{24}$$

以下、帰納法により (24) を示すことを考える。まず $j = 1$ の場合は、

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[h^{(1)} \left(X_1 \right) \right] &= \mathbb{E} \left[\psi_1 \left(X_1 \right) - \theta \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\psi \left(X_1, \cdots, X_k \right) \right] - \theta \\ &= 0 \end{aligned} \tag{25}$$

より (24) は成立する。次に $^{\forall} j' \leq j$ で (24) が成立する時、$j+1$ で (24) が成立することを示す。今、

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[h^{(j+1)} \left(x_1, \cdots, x_j, X_{j+1} \right) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\psi_{j+1} \left(x_1, \cdots, x_j, X_{j+1} \right) - \sum_{c=1}^{j} \sum_{(j+1,c)} h^{(c)} \left(x_{l_1}, \cdots, x_{l_c} \right) - \theta \right] \\ & \qquad\qquad (\text{ただし } x_{j+1} = X_{j+1}) \\ &= \mathbb{E} \left[\psi_{j+1} \left(x_1, \cdots, x_j, X_{j+1} \right) \right] - \sum_{c=1}^{j} \sum_{(j+1,c)} \mathbb{E} \left[h^{(c)} \left(x_{l_1}, \cdots, x_{l_c} \right) \right] - \theta \end{aligned} \tag{26}$$

であり、

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\psi_{j+1} \left(x_1, \cdots, x_j, X_{j+1} \right) \right] &= \mathbb{E}_X \left[\mathbb{E}_Y \left[\psi \left(x_1, \cdots, x_j, X_{j+1}, Y_{j+2}, \cdots, Y_k \right) \right] \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\psi \left(x_1, \cdots, x_j, X_{j+1}, \cdots, X_k \right) \right] \\ &= \psi_j \left(x_1, \cdots, x_j \right) \end{aligned} \tag{27}$$

及び

$$\begin{aligned} & \sum_{c=1}^{j} \sum_{(j+1,c)} \mathbb{E} \left[h^{(c)} \left(x_{l_1}, \cdots, x_{l_c} \right) \right] \\ &= \sum_{c=1}^{j} \left\{ \sum_{(j,c)} \mathbb{E} \left[h^{(c)} \left(x_{l_1}, \cdots, x_{l_c} \right) \right] + \sum_{(j,c-1)} \underbrace{\mathbb{E} \left[h^{(c)} \left(x_{l_1}, \cdots, x_{l_c}, X_{j+1} \right) \right]}_{\text{帰納法の仮定より } = 0} \right\} \\ &= \sum_{c=1}^{j-1} \sum_{(j,c)} \mathbb{E} \underbrace{\left[h^{(c)} \left(x_{l_1}, \cdots, x_{l_c} \right) \right]}_{X_{j+1} \text{ に依存しない}} + \sum_{(j,j)} \mathbb{E} \underbrace{\left[h^{(j)} \left(x_{l_1}, \cdots, x_{l_j} \right) \right]}_{X_{j+1} \text{ に依存しない}} \\ &= \sum_{c=1}^{j-1} \sum_{(j,c)} h^{(c)} \left(x_{l_1}, \cdots, x_{l_c} \right) + h^{(j)} \left(x_1, \cdots, x_j \right) \end{aligned} \tag{28}$$

から、

$$\mathbb{E} \left[h^{(j+1)} \left(x_1, \cdots, x_j, X_{j+1} \right) \right]$$

$$
\begin{aligned}
&= \psi_j\left(x_1, \cdots, x_j\right) - \sum_{c=1}^{j-1} \sum_{(j,c)} h^{(c)}\left(x_{l_1}, \cdots, x_{l_c}\right) - h^{(j)}\left(x_1, \cdots, x_j\right) - \theta \\
&= \left\{ \psi_j\left(x_1, \cdots, x_j\right) - \sum_{c=1}^{j-1} \sum_{(j,c)} h^{(c)}\left(x_{l_1}, \cdots, x_{l_c}\right) - \theta \right\} - h^{(j)}\left(x_1, \cdots, x_j\right) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{29}
$$

となる。($\because h^{(j)}$ の定義。) よって $j+1$ で (24) の成立が示せたので、帰納的に $^{\forall}j$ で (24) が示され、題意は示された。

□