量子コンピュータ実習第五回課題

05242628 三田村彰大

状態の定義

ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ で記述される量子系を考える。この時、状態は一般に密度演算子 $\rho \in \mathcal{D}(\mathcal{H})$ で記述される。ただし $\mathcal{H}$ 上の密度演算子の集合は次のように定義される。

$$\mathcal{D}(\mathcal{H}) \coloneqq \left\{ \rho \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \,\middle|\, \rho \geq 0,\ \mathrm{Tr}[\rho] = 1,\ \rho = \rho^\dagger \right\} \tag{1}$$

ただし $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ は $\mathcal{H}$ 上の線形作用素の集合を表し、Tr は $\mathcal{H}$ 上の任意の正規直交基底 $\{|i\rangle\}$ を用いて

$$\mathrm{Tr}[A] = \sum_i \langle i| A |i\rangle \tag{2}$$

のように定義される。

物理量及び測定確率

物理量は $\mathcal{L}(H)$ 上の自己共役演算子 $A = A^\dagger$ として記述される。この時、A の自己共役性から保証される A の対角化

$$A = \sum_{a,\mu} a |a,\mu\rangle \langle a,\mu| = \sum_a a P_a \tag{3}$$

に対し、状態が ρ であるときに物理量 A の値として a を得る確率 p_a は次のように与えられる。

$$p_a = \mathrm{Tr}[P_a \rho] \tag{4}$$

ただし $|a,\mu\rangle$ は A の a 固有空間の正規直交基底であり、射影演算子 P_a は $P_a = \sum_\mu |a,\mu\rangle \langle a,\mu|$ を満たす。

問 1

問題では状態が $|\psi\rangle$ で与えられているが、より一般に系 $A+B$ の量子状態が密度演算子 ρ_{AB} で与えられる場合で考え題意を示すことにする。この時、

$$\rho \coloneqq \mathrm{Tr}_A[\rho_{AB}] = \sum_{i_A} \langle i_A| \rho_{AB} |i_A\rangle \tag{5}$$

に対し ρ がエルミートかつ半正定値であることを示せば良い。まずエルミート性については、

$$\rho^\dagger = \left(\sum_{i_A} \langle i_A| \rho_{AB} |i_A\rangle \right)^\dagger = \sum_{i_A} \langle i_A| \rho_{AB}^\dagger |i_A\rangle \tag{6}$$

であり、ρ_{AB} が密度演算子でありエルミート性を持つことから

$$\rho^\dagger = \sum_{i_A} \langle i_A| \rho_{AB}^\dagger |i_A\rangle = \sum_{i_A} \langle i_A| \rho_{AB} |i_A\rangle = \rho \tag{7}$$

と示される。また半正定値性については、今 $\forall |x\rangle \in \mathcal{H}_B$ を考える時

$$\begin{aligned}
\langle x| \rho |x\rangle &= \langle x| \mathrm{Tr}_A [\rho_{AB}] |x\rangle & (8)\\
&= \langle x| \sum_{i_A} \langle i_A| \rho_{AB} |i_A\rangle |x\rangle & (9)\\
&= \sum_{i_A} (\langle i_A| \otimes \langle x|) \rho_{AB} (|i_A\rangle \otimes |x\rangle) & (10)
\end{aligned}$$

のようになり、ρ_{AB} が密度演算子であり半正定値性を持つことから

$$\forall |i_A\rangle ;\ ((\langle i_A| \otimes \langle x|) \rho_{AB} (|i_A\rangle \otimes |x\rangle) \geq 0 \tag{11}$$

となるので

$$\langle x| \rho |x\rangle \geq 0 \tag{12}$$

を得る。(よって半正定値性も示される。)

問２

二準位系の量子状態

$$\rho = (I + c_X X + c_Y Y + c_Z Z)/2 \tag{13}$$

を考える。この時、密度演算子の性質から $\mathrm{Tr}\left[\rho^2\right] \leq 1$ が従い、等号は純粋状態の時に成立する。そこで ρ^2 を上記の ρ に対し実際に計算してみると

$$\begin{aligned}
\rho^2 = \rho\rho^\dagger = &\ \frac{1}{4} (I + c_X X + c_Y Y + c_Z Z) \left(I + c_X^* X^\dagger + c_Y^* Y^\dagger + c_Z^* Z^\dagger\right) & (14)\\
= &\ \frac{1}{4}\Bigg(I + c_x * X + c_Y^* Y + c_Z^* Z \\
&\qquad + c_X X + |c_X|^2 I + i c_X c_Y^* Z - i c_X c_Z^* Y \\
&\qquad + c_Y Y - i c_X^* c_Y Z + |c_Y|^2 I + i c_Y c_Z^* X & (15)\\
&\qquad + c_Z Z + i c_Z c_X^* Y - i c_Z c_Y^* X + |c_Z|^2 I\Bigg) \\
= &\ \frac{1}{4}\Bigg\{ I\left(1 + |c_X|^2 + |c_Y|^2 + |c_Z|^2\right) \\
&\qquad + X (c_X + c_X^* + i c_Y c_Z^* - i c_Z c_Y^*) \\
&\qquad + Y (c_Y + c_Y^* + i c_Z c_X^* - i c_X c_Z^*) & (16)\\
&\qquad + Z (c_Z + c_Z^* + i c_X c_Y^* - i c_Y c_X^*) \Bigg\}
\end{aligned}$$

のようになり、$\mathrm{Tr}[X] = \mathrm{Tr}[Y] = \mathrm{Tr}[Z] = 0$ 及び $\mathrm{Tr}[I] = 2$ から

$$\mathrm{Tr}\left[\rho^2\right] = \frac{1}{2}\left(1 + |c_X|^2 + |c_Y|^2 + |c_Z|^2\right) \tag{17}$$

を得るので、$\mathrm{Tr}\left[\rho^2\right] \leq 1$ から

$$|c_X|^2 + |c_Y|^2 + |c_Z|^2 \leq 1 \tag{18}$$

を得る。また、等号が純粋状態の場合に限ることは、$\mathrm{Tr}\left[\rho^2\right] \leq 1$ の等号成立がが純粋状態の場合に限ることから従う。

次に、与えられた三つのチャンネルに対し Bloch 球の変形を考える。

ビット反転ノイズ

$\varepsilon_{\mathrm{bit}}(\cdot) = (1-p)\cdot + pX \cdot X$ の時、二準位系の量子状態に対する操作の結果は次のようになる。

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\mathrm{bit}}(\rho) = & \ (1-p)(I + c_X X + c_Y Y + c_Z Z)/2 + pX(I + c_X X + c_Y Y + c_Z Z)/2X && (19)\\
= & \ \{(1-p)I + (1-p)c_X X + (1-p)c_Y Y + (1-p)c_Z Z\}/2 \\
& \qquad + \{p + pc_X - pc_Y Y - pc_Z Z\}/2 && (20)\\
= & \ \{I + c_X X + (1-2p)c_Y Y + (1-2p)c_Z Z\}/2 && (21)
\end{aligned}$$

よって Bloch 球の変形は次のように記述される。(Figure1参照。)

$$c_X \rightsquigarrow c_X \quad , \quad c_Y \rightsquigarrow (1-2p)c_Y \quad , \quad c_Z \rightsquigarrow (1-2p)c_Z \tag{22}$$

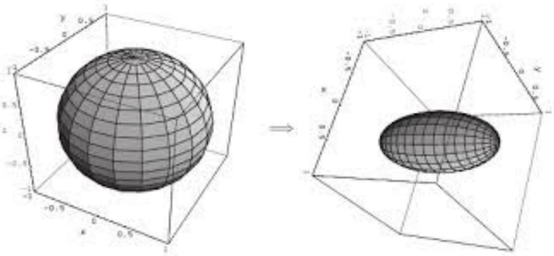

Figure1: ビット反転ノイズによる Bloch 球の変形。授業スライドより。

位相反転ノイズ

$\varepsilon_{\mathrm{phase}}(\cdot) = (1-p)\cdot + pZ \cdot Z$ の時、二準位系の量子状態に対する操作の結果は次のようになる。

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\mathrm{bit}}(\rho) = & \ (1-p)(I + c_X X + c_Y Y + c_Z Z)/2 + pZ(I + c_X X + c_Y Y + c_Z Z)/2Z && (23)\\
= & \ \{(1-p)I + (1-p)c_X X + (1-p)c_Y Y + (1-p)c_Z Z\}/2 \\
& \qquad + \{p - pc_X - pc_Y Y + pc_Z Z\}/2 && (24)\\
= & \ \{I + (1-2p)c_X X + (1-2p)c_Y Y + c_Z Z\}/2 && (25)
\end{aligned}$$

よって Bloch 球の変形は次のように記述される。(Figure2参照。)

$$c_X \rightsquigarrow (1-2p)\, c_X \quad , \quad c_Y \rightsquigarrow (1-2p)\, c_Y \quad , \quad c_Z \rightsquigarrow c_Z \tag{26}$$

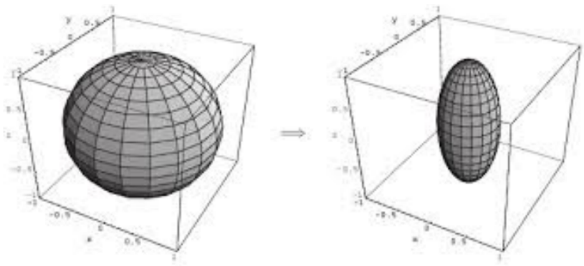

Figure2: 位相反転ノイズによる Bloch 球の変形。授業スライドより。

脱分局ノイズ

$\varepsilon_{\mathrm{dep}}\,(\cdot) = (1-p)\cdot + \frac{p}{3} X \cdot X + \frac{p}{3} Y \cdot Y + \frac{p}{3} Z \cdot Z$ の時、二準位系の量子状態に対する操作の結果は次のようになる。

$$\varepsilon_{\mathrm{bit}}\,(\rho) = (1-p)\,\rho + \frac{p}{3} X\rho X + \frac{p}{3} Y\rho Y + \frac{p}{3} Z\rho Z \tag{27}$$

$$\begin{aligned} = &\ \{(1-p)\, I + (1-p)\, c_X X + (1-p)\, c_Y Y + (1-p)\, c_Z Z\}/2 \\ &+ \frac{p}{3}\{I + c_X X - c_Y Y - c_Z Z\}/2 \\ &+ \frac{p}{3}\{I - c_X X + c_Y Y - c_Z Z\}/2 \\ &+ \frac{p}{3}\{I - c_X X - c_Y Y + c_Z Z\}/2 \end{aligned} \tag{28}$$

$$= \left\{ I + \left(1 - \frac{4}{3}p\right) c_X X + \left(1 - \frac{4}{3}p\right) c_Y Y + \left(1 - \frac{4}{3}p\right) c_Z Z \right\}/2 \tag{29}$$

よって Bloch 球の変形は次のように記述される。(Figure3参照。)

$$c_X \rightsquigarrow \left(1 - \frac{4}{3}p\right) c_X \quad , \quad c_Y \rightsquigarrow \left(1 - \frac{4}{3}p\right) c_Y \quad , \quad c_Z \rightsquigarrow \left(1 - \frac{4}{3}p\right) c_Z \tag{30}$$

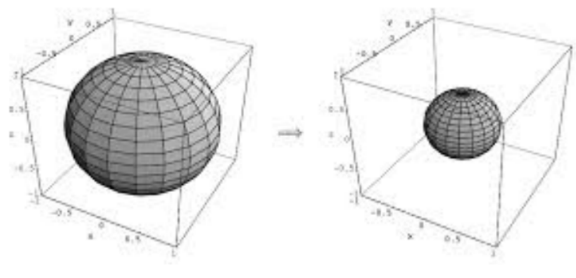

Figure3: 脱分局ノイズによる Bloch 球の変形。授業スライドより。

問３

(1)

帰納法により示す。まず $N=1$ においては、I, X, Y, Z のいずれもユニタリかつエルミートであり、固有値の全てが ± 1 となっているので $P \in \boldsymbol{P}_1$ において P のユニタリ性・エルミート性及び固有値が ± 1 であることは保証される。

次に、$P \in \boldsymbol{P}_N$ において P のユニタリ性・エルミート性及び固有値が ± 1 であることは保証されている場合を考える。この時 $P \in \boldsymbol{P}_{N+1}$ を考えると $P \in \boldsymbol{P}_1 \otimes \boldsymbol{P}_N$ であり、$\boldsymbol{P}_1$ 及び $P \in \boldsymbol{P}_N$ 上の任意の作用素は今仮定よりユニタリ性・エルミート性及び固有値が ± 1 であることを満たすので P はユニタリ性・エルミート性及び固有値が ± 1 であることを満たす。よって帰納的に、$\forall N$ に対し題意が示せた。

(2)

$U = \exp(i\theta P)$ のユニタリ性を示すために、$UU^\dagger = I$ を示す。今、

$$U = \exp(i\theta P) = I + \frac{(i\theta P)^1}{1!} + \frac{(i\theta P)^2}{2!} + \frac{(i\theta P)^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^k}{k!} P^k \tag{31}$$

であるので、

$$\begin{aligned} U^\dagger U = & \left(\sum_{k'=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^{k'}}{k'!} P^{k'} \right)^\dagger \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^k}{k!} P^k \right) && (32) \\ = & \left(\sum_{k'=0}^{\infty} \frac{(-i\theta)^{k'}}{k'!} \left(P^\dagger\right)^{k'} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^k}{k!} P^k \right) && (33) \\ = & \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{l} \frac{(-1)^k}{(l-k)!k!} (i\theta P)^l && (34) \end{aligned}$$

となる。ただし途中で $P^\dagger = P$ を利用している。この時、

$$(1+x)^l = \sum_{k=0}^{l} \frac{l!}{(l-k)!k!} x^k = l! \times \sum_{k=0}^{l} \frac{x^k}{(l-k)!k!} \tag{35}$$

であるから、$l \neq 0$ に対し

$$0 = (1-1)^l = l! \times \sum_{k=0}^{l} \frac{(-1)^k}{(l-k)!k!} \quad \rightsquigarrow \quad \sum_{k=0}^{l} \frac{(-1)^k}{(l-k)!k!} = 0 \tag{36}$$

が成立する。よって、

$$U^\dagger U = \sum_{k=0}^{l} \frac{(-1)^k}{(l-k)!k!} (i\theta P)^l \bigg|_{l=0} = I \tag{37}$$

となり、確かに U はユニタリである。

(3)

$\mathcal{P}_N = \{\pm 1, \pm i\} \times \{I, X, Y, Z\}^{\otimes N}$ が群となることを示す。そのために、$\mathcal{P}_N \ni g = \alpha P$ とおく。すなわち $\alpha \in \{\pm 1, \pm i\} \wedge P \in \{I, X, Y, Z\}^{\otimes N}$ である。この時、まず群の閉包性については、$\mathcal{P}_N \ni g_1 = \alpha_1 P_1$ および $\mathcal{P}_N \ni g_2 = \alpha_2 P_2$ に対し

$$g_1 g_2 = (\alpha_1 P_1)(\alpha_2 P_2) = \alpha_1 \alpha_2 P_1 P_2 \tag{38}$$

であり、$\alpha_1 \alpha_2 P_1 P_2 \in \{\pm 1, \pm i\} \times \{I, X, Y, Z\}^{\otimes N}$ から $g_1 g_2 \in \mathcal{P}_N$ が従うので確かに閉包性を持つ。

また単位元の存在については、今 $e = 1 \cdot I$ とおくと $\forall g = \alpha P \in \mathcal{P}_N$ に対して

$$eg = (1 \cdot I)(\alpha P) = \alpha P = g = ge \tag{39}$$

が成り立つので e は単位元となる。

また逆元の存在については、$g = \alpha P \in \mathcal{P}_N$ に対して

$$g^{-1} = \beta P' \quad \begin{cases} \beta = \alpha \ (\text{if } \alpha = \pm 1) \\ \beta = \mp i \ (\text{if } \alpha = \pm i) \\ P' = P \end{cases} \tag{40}$$

のように定めることで $g^{-1} g = g g^{-1} = e$ が満たされることがわかる。

最後に結合法則については、

$$(g_1 g_2) g_3 = (\alpha_1 P_1 \alpha_2 P_2) \alpha_3 P_3 = (\alpha_1 \alpha_2 P_1 P_2) \alpha_3 P_3 = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 P_1 P_2 P_3 = \alpha_1 P_2 \ \ (\alpha_2 \alpha_3 P_2 P_3) = g_1 (g_2 g_3) \tag{41}$$

から従う。

(4)

状態を表す密度演算子は $\rho = |\psi\rangle \langle\psi|$ であり、この時 p_b は次のようになる。

$$p_b = \mathrm{Tr}[\rho \Pi_b] = \sum_{b'} \langle b'| \rho |b\rangle \langle b|b'\rangle = \langle b| \rho |b\rangle = \langle b|\psi\rangle \langle\psi|b\rangle \tag{42}$$

またその総和は

$$\sum_b p_b = \sum_b \langle b| \rho |b\rangle = \mathrm{Tr}[\rho] = 1 \tag{43}$$

となる。ただし最後の等号は密度演算子の定義より従う。