

量子コンピュータ実習第8回課題

05242628 三田村彰大

問1

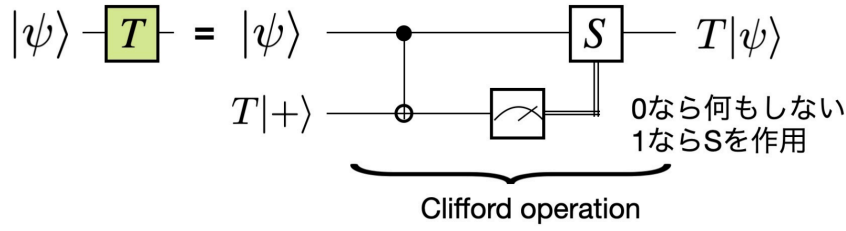


Figure1: 考える量子回路。問題文中より。

今、 $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ とするとき、Figure1のような回路において状態は次のように遷移する。

$$|\psi\rangle \otimes T|+\rangle = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \otimes T\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)\right\} \quad (1)$$

$$\xrightarrow{\text{CNOT}} \alpha|0\rangle \otimes T\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)\right\} + \beta|1\rangle \otimes XT\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)\right\} \quad (2)$$

$$= \frac{\alpha}{\sqrt{2}}|0\rangle \otimes (|0\rangle + e^{i\pi/4}|1\rangle) + \frac{\beta}{\sqrt{2}}|1\rangle \otimes (e^{i\pi/4}|0\rangle + |1\rangle) \quad (3)$$

$$= \left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}|0\rangle + e^{i\pi/4}\frac{\beta}{\sqrt{2}}|1\rangle\right) \otimes |0\rangle + \left(e^{i\pi/4}\frac{\alpha}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{\beta}{\sqrt{2}}|1\rangle\right) \otimes |1\rangle \quad (4)$$

$$= |\psi'\rangle \quad (5)$$

よって今、アンシラの Z 測定において $|0\rangle$ が得られる確率は

$$p_0 = \|(I \otimes |0\rangle\langle 0|)|\psi'\rangle\|^2 \quad (6)$$

$$= \left\|\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}|0\rangle + e^{i\pi/4}\frac{\beta}{\sqrt{2}}|1\rangle\right) \otimes |0\rangle\right\|^2 \quad (7)$$

$$= \frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2) = \frac{1}{2} \quad (8)$$

であり、この時測定後の状態は

$$|\psi''\rangle = \frac{(I \otimes |0\rangle\langle 0|)|\psi'\rangle}{\sqrt{p_0}} = \frac{\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}|0\rangle + e^{i\pi/4}\frac{\beta}{\sqrt{2}}|1\rangle\right) \otimes |0\rangle}{1/\sqrt{2}} = (\alpha|0\rangle + e^{i\pi/4}\beta|1\rangle) \otimes |0\rangle \quad (9)$$

のようになる。よって、 $\alpha|0\rangle + e^{i\pi/4}\beta|1\rangle$ が非アンシラ側の状態であり、今測定の結果が 0 の時は何もしないので最終的な状態は $\alpha|0\rangle + e^{i\pi/4}\beta|1\rangle$ となる。この時、

$$T|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + e^{i\pi/4}\beta|1\rangle \quad (10)$$

であるから、確かに最終的な状態は $T|\psi\rangle$ となっている。同様に、測定において $|1\rangle$ が得られる確率を計算すると $p_1 = \frac{1}{2}$ となり、この時測定後の状態は次のようになる。

$$|\psi''\rangle = \frac{(I \otimes |1\rangle\langle 1|)|\psi'\rangle}{\sqrt{p_1}} = \frac{\left(e^{i\pi/4}\frac{\alpha}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{\beta}{\sqrt{2}}|1\rangle\right) \otimes |1\rangle}{1/\sqrt{2}} = \left(e^{i\pi/4}\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle\right) \otimes |1\rangle \quad (11)$$

よって非アンシラ側の状態は $e^{i\pi/4}\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ となり、測定結果 1 であるから S を作用させれば、最終的な状態は次のようになる。

$$e^{i\pi/4}\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \xrightarrow{S} e^{i\pi/4}\alpha|0\rangle + i\beta|1\rangle \quad (12)$$

$$= e^{i\pi/4} \left(\alpha|0\rangle + e^{i\pi/4}\beta|1\rangle \right) \quad (13)$$

$$= e^{i\pi/4} T|\psi\rangle \quad (14)$$

$$\sim T|\psi\rangle \quad (15)$$

よって、グローバル位相を除いて最終的な状態は $T|\psi\rangle$ となっており、0 と 1 いずれの測定結果においても T ゲートが実装できていることがわかる。

問 2

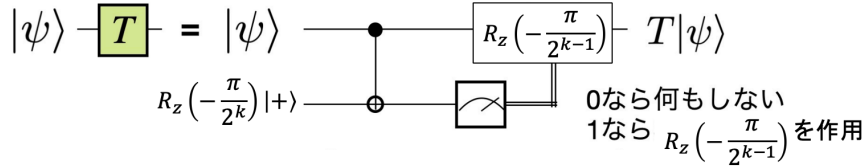


Figure2: 考える量子回路。

今 $R_z(-\frac{\pi}{2^k})$ ($k \geq 4$) ゲートを実装する回路として、Figure1の S を $R_z(-\frac{\pi}{2^{k-1}})$ に置き換え、かつ魔法状態として $R_z(-\frac{\pi}{2^k})|+\rangle$ を用意するような量子回路を考える。(Figure2参照。) この時この回路は $k \leq k-1$ に対し $R_z(-\frac{\pi}{2^k})$ ゲートが実装できていれば実装可能であり、 T ゲートが $R_z(-\frac{\pi}{2^3})$ に等しいことを思い出せば、上記の回路は $k \geq 4$ に対し再帰的に準備することが可能である。^{*1}

*1 ただし、測定結果が 0 となった時点で再帰は止めて良い。

この時、測定前の状態は次のようになる。

$$|\psi\rangle \otimes R_z\left(-\frac{\pi}{2^k}\right)|+\rangle = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \otimes R_z\left(-\frac{\pi}{2^k}\right)\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)\right\} \quad (16)$$

$$\xrightarrow{\text{CNOT}} \alpha|0\rangle \otimes R_z\left(-\frac{\pi}{2^k}\right)\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)\right\} + \beta|1\rangle \otimes X R_z\left(-\frac{\pi}{2^k}\right)\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)\right\} \quad (17)$$

$$= \frac{\alpha}{\sqrt{2}}|0\rangle \otimes (|0\rangle + e^{i\pi/2^{k-1}}|1\rangle) + \frac{\beta}{\sqrt{2}}|1\rangle \otimes (e^{i\pi/2^{k-1}}|0\rangle + |1\rangle) \quad (18)$$

$$= \left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}|0\rangle + e^{i\pi/2^{k-1}}\frac{\beta}{\sqrt{2}}|1\rangle\right) \otimes |0\rangle + \left(e^{i\pi/2^{k-1}}\frac{\alpha}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{\beta}{\sqrt{2}}|1\rangle\right) \otimes |1\rangle \quad (19)$$

$$= |\psi'\rangle \quad (20)$$

よってやはり、測定によって 0, 1 が得られる確率はいずれも 1/2 であり、測定後の状態は次のようになる。

測定結果が 0 の時：

$$|\psi''\rangle = \frac{(I \otimes |0\rangle\langle 0|)|\psi'\rangle}{\sqrt{p_0}} = \frac{\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}|0\rangle + e^{i\pi/2^{k-1}}\frac{\beta}{\sqrt{2}}|1\rangle\right) \otimes |0\rangle}{1/\sqrt{2}} = (\alpha|0\rangle + e^{i\pi/2^{k-1}}\beta|1\rangle) \otimes |0\rangle \quad (21)$$

測定結果が 1 の時：

$$|\psi''\rangle = \frac{(I \otimes |1\rangle\langle 1|)|\psi'\rangle}{\sqrt{p_1}} = \frac{\left(e^{i\pi/2^{k-1}}\frac{\alpha}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{\beta}{\sqrt{2}}|1\rangle\right) \otimes |1\rangle}{1/\sqrt{2}} = (e^{i\pi/2^{k-1}}\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \otimes |1\rangle \quad (22)$$

今、測定結果が 0 の時は何もしないので非アンシラ側の状態は $\alpha|0\rangle + e^{i\pi/2^{k-1}}\beta|1\rangle$ となり、測定結果が 1 の時は $R_z\left(-\frac{\pi}{2^{k-1}}\right)$ を作用させるので、非アンシラ側の状態は

$$e^{i\pi/2^{k-1}}\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \xrightarrow{R_z\left(-\frac{\pi}{2^{k-1}}\right)} e^{i\pi/2^{k-1}}\alpha|0\rangle + e^{i\pi/2^{k-2}}\beta|1\rangle \quad (23)$$

$$= e^{i\pi/2^{k-1}}(\alpha|0\rangle + e^{i\pi/2^{k-1}}\beta|1\rangle) \quad (24)$$

$$\sim \alpha|0\rangle + e^{i\pi/2^{k-1}}\beta|1\rangle \quad (25)$$

となる。よって最終的な状態は測定結果によらず、(グローバル位相を除いて)

$$\alpha|0\rangle + e^{i\pi/2^{k-1}}\beta|1\rangle = R_z\left(-\frac{\pi}{2^k}\right)|\psi\rangle \quad (26)$$

となり、確かに $R_z\left(-\frac{\pi}{2^k}\right)$ が実装できていることがわかる。