

地球流体力学 II レポート 5

05-242628 三田村彰大

January 29, 2026

1 c_r の範囲について

*1 改めてレイリー方程式を書き下すと以下のよう。

$$\frac{d^2 \phi}{dy^2} - k^2 \phi + \frac{1}{\bar{u} - c} \left(\beta - \frac{d^2 \bar{u}}{dy^2} \right) \phi = 0 \quad (1)$$

この時、 f 面について用いた方法と同様の方法により β 面において擾乱が生じる場合に c_r, c_i が満たす条件を考える。まず、南北に流体中が移動する距離 Y を f 面の場合と同様に導入する。この時やはり同様に、

$$\begin{Bmatrix} \Psi \\ Y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi(y) \\ a(y) \end{Bmatrix} \exp[ik(x - ct)] \rightsquigarrow \phi = (\bar{u} - c) a \quad (2)$$

が成立する。よって (2) を (1) に代入すれば以下を得る。

$$\frac{d^2}{dy^2} \{(\bar{u} - c) a\} - k^2 (\bar{u} - c) a + \frac{1}{\bar{u} - c} \left(\beta - \frac{d^2 \bar{u}}{dy^2} \right) (\bar{u} - c) a = 0 \quad (3)$$

よってこれを整理して (Appendix3.1参照)

$$\frac{d}{dy} \left\{ (\bar{u} - c)^2 \frac{da}{dy} \right\} - k^2 (\bar{u} - c)^2 a + (\bar{u} - c) a \beta = 0 \quad (4)$$

を得る。よってこれに a の共役 a^* をかけて南北方向に積分し $c = c_r + ic_i$ を代入すれば次を得る。(Appendix3.2参照)

$$- \int_0^L \left[\left\{ (\bar{u} - c_r)^2 - c_i^2 \right\} P - (\bar{u} - c_r) |a|^2 \beta \right] dy + i2c_i \int_0^L \left\{ (\bar{u} - c_r) P - |a|^2 \frac{\beta}{2} \right\} dy = 0 \quad (5)$$

ただし $P = k^2 |a|^2 + \left| \frac{da}{dy} \right|^2$ である。よって実部・虚部それぞれが 0 となり、特に擾乱が生じる条件から $c_i \neq 0$ であるので、虚部についての式より

$$\int_0^L \left\{ (\bar{u} - c_r) P - |a|^2 \frac{\beta}{2} \right\} dy = 0 \quad (6)$$

*1 参考: [1]

を得る。特に今 $\int Pdy > 0$ と考えて良いので、(6) を整理して c_r について次を得る。

$$c_r = \frac{\int_0^L \bar{u}Pdy}{\int_0^L Pdy} - \frac{\beta}{2} \frac{\int_0^L |a|^2 dy}{\int_0^L Pdy} \quad (7)$$

今 (7) を見ると、右辺第一項目については

$$\bar{u}_{\min} \leq \frac{\int_0^L \bar{u}Pdy}{\int_0^L Pdy} \leq \bar{u}_{\max} \quad (8)$$

のように評価することができる。また右辺第二項の評価についてだが、ここでは [1] を参考に $a(y)$ をフーリエ展開することでこれを行う。いま a は $a(0) = a(L) = 0$ を満たすのであったから、余弦のみを用いて次のように展開できる。

$$a(y) = \sum_{j=0}^{\infty} A_j \cos \left\{ \pi \frac{2}{L} \left(y - \frac{L}{2} \right) \left(j + \frac{1}{2} \right) \right\} \quad (9)$$

これを用いると、 $\int_0^L |a|^2 dy$ および $\int_0^L \left| \frac{da}{dy} \right|^2 dy$ は次のように評価できる。(Appendix3.3参照)

$$\int_0^L \left| \frac{da}{dy} \right|^2 dy \geq \frac{\pi^2}{L^2} \int_0^L |a|^2 dy \quad (10)$$

よって

$$\int_0^L Pdy = \int_0^L \left(k^2 |a|^2 + \left| \frac{da}{dy} \right|^2 \right) dy \geq \left(k^2 + \frac{\pi^2}{L^2} \right) \int_0^L |a|^2 dy \quad (11)$$

となり、(7) の第二項の積分については次のように評価できる。

$$0 \leq \frac{\int_0^L |a|^2 dy}{\int_0^L Pdy} \leq \frac{1}{k^2 + \pi^2/L^2} \leq \frac{1}{k^2} \quad (12)$$

*2 よって (8) と (12) を合わせることで、 c_r の範囲が次のように定まる。

$$\bar{u}_{\min} - \frac{\beta}{2k^2} \leq c_r \leq \bar{u}_{\max} \quad (13)$$

*2 今回は [1] を大いに参考にしているが、ここではこの項の評価を $1/(k^2 + \pi^2/L^2)$ ではなく $1/k^2$ で行っているためここでもそれに従っている。ただ、できるだけ系に依存しない形で c_r, c_i の範囲を与えたいことを考えるとこれは自然なことであると思われる。

2 Pedlosky の半円定理

次に、 f 面と同様の手法により β 面についても c_r, c_i の範囲を求める。いま (5) において実部および虚部が 0 となる条件から改めて

$$\int_0^L \left[\left\{ (\bar{u} - c_r)^2 - c_i^2 \right\} P - (\bar{u} - c_r) |a|^2 \beta \right] dy = 0 \quad (14)$$

$$\int_0^L \left\{ (\bar{u} - c_r) P - |a|^2 \frac{\beta}{2} \right\} dy = 0 \quad (15)$$

を得る。また f 面と同様に次の積分による評価を用いることを考える。

$$\int_0^L (\bar{u} - \bar{u}_{\min}) (\bar{u}_{\max} - \bar{u}) P dy \geq 0 \quad (16)$$

よって f 面の場合と同様に $(- (14) - (16) + (\bar{u}_{\min} + \bar{u}_{\max} - 2c_r) \times (15))$ を考えれば、次を得ることができる。

$$\int_0^L \left\{ \left(c_r - \frac{\bar{u}_{\min} + \bar{u}_{\max}}{2} \right)^2 + c_i^2 - \left(\frac{\bar{u}_{\max} - \bar{u}_{\min}}{2} \right)^2 \right\} P dy \quad (17)$$

$$\leq -\beta \int_0^L |a|^2 \left(\bar{u} - \frac{\bar{u}_{\min} + \bar{u}_{\max}}{2} \right) dy \quad (18)$$

ただし基本的な式変形は f 面の場合と同様であり、今回は β についての余分な項が右辺に現れる形となっている。^{*3}

よって仮に $\beta > 0$ の場合を考えると、(18) は次のように抑えることができる。

$$-\beta \int_0^L |a|^2 \left(\bar{u} - \frac{\bar{u}_{\min} + \bar{u}_{\max}}{2} \right) dy \leq -\beta \int_0^L |a|^2 \left(\bar{u}_{\min} - \frac{\bar{u}_{\min} + \bar{u}_{\max}}{2} \right) dy \quad (19)$$

$$= \beta \left(\frac{\bar{u}_{\max} - \bar{u}_{\min}}{2} \right) \int_0^L |a|^2 dy \quad (20)$$

よってこれを (17) と合わせることで、次を得る。

$$\left\{ \left(c_r - \frac{\bar{u}_{\min} + \bar{u}_{\max}}{2} \right)^2 + c_i^2 - \left(\frac{\bar{u}_{\max} - \bar{u}_{\min}}{2} \right)^2 \right\} \int_0^L P dy \quad (21)$$

$$\leq \beta \left(\frac{\bar{u}_{\max} - \bar{u}_{\min}}{2} \right) \int_0^L |a|^2 dy \quad (22)$$

特に、 $\int |a|^2 dy$ と $\int P dy$ の関係については (12) で得られた通りであるから、最終的に次のような c_r, c_i についての範囲を導くことができる。

$$\left(c_r - \frac{\bar{u}_{\min} + \bar{u}_{\max}}{2} \right)^2 + c_i^2 \leq \left(\frac{\bar{u}_{\max} - \bar{u}_{\min}}{2} \right)^2 + \frac{\beta}{k^2} \left(\frac{\bar{u}_{\max} - \bar{u}_{\min}}{2} \right) \quad (23)$$

特に、(23) を見るとこれは $c_i > 0$ のもとで半円の式になっており、また $\beta = 0$ で f 面の場合と領域として一致することがわかる。また c_r, c_i の範囲は β 面における場合の方が広がっており、特に c_i の取りうる最大値が大きくなっ

^{*3} 時間の都合で詳しい計算過程を Appendix に載せることができていない。申し訳ないです。

ていることから β 面近似まで考えた場合の擾乱はより早く成長することがわかる。

[1] https://www.gfd-dennou.org/arch/lecture/NAO_GFD/notes/ShearInstability/int-th/pedsemcm.pdf

3 Appendix

3.1 (4) の導出について

(3) から (4) を導出する。^{*4}いま (3) を改めて書き下すと以下のよう。

$$\frac{d^2}{dy^2} \{(\bar{u} - c) a\} - k^2 (\bar{u} - c) a + \frac{1}{\bar{u} - c} \left(\beta - \frac{d^2 \bar{u}}{dy^2} \right) (\bar{u} - c) a = 0 \quad (24)$$

ここで、式全体に $(\bar{u} - c)$ をかけると次を得る。

$$(\bar{u} - c) \frac{d^2}{dy^2} \{(\bar{u} - c) a\} - k^2 (\bar{u} - c)^2 a + \left(\beta - \frac{d^2 \bar{u}}{dy^2} \right) (\bar{u} - c) a = 0 \quad (25)$$

特に今、第一項と第三項のうちの $d^2 \bar{u} / dy^2$ がかかる項はまとめて、

$$(\bar{u} - c) \frac{d^2}{dy^2} \{(\bar{u} - c) a\} - (\bar{u} - c) a \left(\frac{d^2 \bar{u}}{dy^2} \right) \quad (26)$$

$$= (\bar{u} - c) \frac{d}{dy} \left\{ (\bar{u} - c) \frac{da}{dy} \right\} + (\bar{u} - c) \frac{d}{dy} \left[\left\{ \frac{d}{dy} (\bar{u} - c) \right\} a \right] - (\bar{u} - c) a \left(\frac{d^2 \bar{u}}{dy^2} \right) \quad (27)$$

$$= (\bar{u} - c) \left\{ \frac{d}{dy} (\bar{u} - c) \right\} \frac{da}{dy} + (\bar{u} - c)^2 \frac{d^2 a}{dy^2} + (\bar{u} - c) \left\{ \frac{d^2}{dy^2} (\bar{u} - c) \right\} a \quad (28)$$

$$+ (\bar{u} - c) \left\{ \frac{d}{dy} (\bar{u} - c) \right\} \frac{da}{dy} - (\bar{u} - c) \left\{ \frac{d^2}{dy^2} (\bar{u} - c) \right\} a \quad (29)$$

$$= (\bar{u} - c)^2 \frac{d^2 a}{dy^2} + 2 (\bar{u} - c) \left\{ \frac{d}{dy} (\bar{u} - c) \right\} \frac{da}{dy} \quad (30)$$

$$= \frac{d}{dy} \left\{ (\bar{u} - c)^2 \frac{da}{dy} \right\} \quad (31)$$

のように変形できる。よってこれを代入すれば (25) から

$$\frac{d}{dy} \left\{ (\bar{u} - c)^2 \frac{da}{dy} \right\} - k^2 (\bar{u} - c)^2 a + (\bar{u} - c) a \beta = 0 \quad (32)$$

として (4) を得る。

3.2 (5) の導出

(4) から (5) を導出する。^{*5}いま (4) は

$$\frac{d}{dy} \left\{ (\bar{u} - c)^2 \frac{da}{dy} \right\} - k^2 (\bar{u} - c)^2 a + (\bar{u} - c) a \beta = 0 \quad (33)$$

^{*4} (3) は f 面の場合の一つ追加で項が付いているだけなので f 面の結果をそのまま流用しても問題ないと思うが、なんとなく気持ち悪かったので導出しておく。

^{*5} やはりこれも f 面の場合の一つ項が加わっただけなので特に示す必要はないと思われるが、念の為示しておく。

であり、これに a^* をかけて南北積分すると

$$\int_0^L a^* \frac{d}{dy} \left\{ (\bar{u} - c)^2 \frac{da}{dy} \right\} dy - \int_0^L k^2 (\bar{u} - c)^2 |a|^2 dy + \int_0^L (\bar{u} - c) |a|^2 \beta dy = 0 \quad (34)$$

となる。まず第一項については、 $a(0) = a(L) = 0$ を用いれば部分積分により

$$\int_0^L a^* \frac{d}{dy} \left\{ (\bar{u} - c)^2 \frac{da}{dy} \right\} dy = \left[a^* (\bar{u} - c)^2 \frac{da}{dy} \right]_0^L - \int_0^L \left| \frac{da}{dy} \right|^2 (\bar{u} - c)^2 dy \quad (35)$$

$$= - \int_0^L \{ (\bar{u} - c_r) - ic_i \}^2 \left| \frac{da}{dy} \right|^2 dy \quad (36)$$

$$= - \int_0^L \{ (\bar{u} - c_r)^2 - c_i^2 \} \left| \frac{da}{dy} \right|^2 dy + 2ic_i \int_0^L (\bar{u} - c_r) \left| \frac{da}{dy} \right|^2 dy \quad (37)$$

となる。また第二項については

$$\int_0^L k^2 (\bar{u} - c)^2 |a|^2 dy = k^2 \int_0^L \{ (\bar{u} - c_r)^2 - c_i^2 \} |a|^2 dy - 2ic_i k^2 \int_0^L (\bar{u} - c_r) |a|^2 dy \quad (38)$$

となる。最後に第三項については

$$\int_0^L (\bar{u} - c) |a|^2 \beta dy = \int_0^L (\bar{u} - c_r) |a|^2 \beta dy - ic_i \int_0^L |a|^2 \beta dy \quad (39)$$

となる。よって (37) (38) (39) を合わせて実部と虚部に分ければ、(34) は

$$- \int_0^L \left[\{ (\bar{u} - c_r)^2 - c_i^2 \} P - (\bar{u} - c_r) |a|^2 \beta \right] dy + i2c_i \int_0^L \left[(\bar{u} - c_r) P - |a|^2 \frac{\beta}{2} \right] dy = 0 \quad (40)$$

となり (5) を得る。

3.3 (10) の導出

いま $a(y)$ を次のようにフーリエ展開する。

$$a(y) = \sum_{j=0}^{\infty} \cos \left\{ \pi \frac{2}{L} \left(y - \frac{L}{2} \right) \left(j + \frac{1}{2} \right) \right\} \quad (41)$$

この時、

$$\frac{da}{dy} = \sum_j \left\{ A_j \pi \left(j + \frac{1}{2} \right) \frac{2}{L} \right\} \sin \left\{ \pi \frac{2}{L} \left(y - \frac{L}{2} \right) \left(j + \frac{1}{2} \right) \right\} \quad (42)$$

のようになるので、

$$\int_0^L \left| \frac{da}{dy} \right|^2 dy = \sum_j \left\{ A_j \pi \left(j + \frac{1}{2} \right) \frac{2}{L} \right\}^2 \int_0^L \sin^2 \left\{ \pi \frac{2}{L} \left(y - \frac{L}{2} \right) \left(j + \frac{1}{2} \right) \right\} dy \quad (43)$$

$$= \sum_j |A_j|^2 \pi^2 \left(j + \frac{1}{2} \right)^2 \frac{2}{L} \quad (44)$$

のように計算できる。よって

$$\int_0^L \left| \frac{da}{dy} \right|^2 dy = \sum_j |A_j|^2 \pi^2 \left(j + \frac{1}{2} \right)^2 \frac{2}{L} \geq \frac{\pi^2}{2L} \sum_j |A_j|^2 \quad (45)$$

のように積分を評価することができる。また $\int_0^L |a|^2 dy$ については、(41) を代入して

$$\int_0^L |a|^2 dy = \sum_j |A_j|^2 \int_0^L \cos^2 \left\{ \pi \frac{2}{L} \left(y - \frac{L}{2} \right) \left(j + \frac{1}{2} \right) \right\} dy \quad (46)$$

$$= \sum_j |A_j|^2 \frac{L}{2} \quad (47)$$

のように計算できる。よってこれを (45) と合わせれば、最終的に

$$\int_0^L \left| \frac{da}{dy} \right|^2 dy \geq \frac{\pi^2}{L^2} \int_0^L |a|^2 dy \quad (48)$$

となり、(10) を得ることができる。