

地球流体力学 II レポート 3

05-242628 三田村彰大

January 29, 2026

次の方程式系を解くことを考える。

$$\frac{\partial u}{\partial t} - fv + f^*w = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + fu = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} - f^*u = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

1 Poincare 波に対応した波動解

今、解として $\propto e^{i(kx+ly+hz-\omega t)}$ の形で表されるような平面波を仮定する。この時

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightsquigarrow -i\omega, \quad \frac{\partial}{\partial x} \rightsquigarrow ik, \quad \frac{\partial}{\partial y} \rightsquigarrow il, \quad \frac{\partial}{\partial z} \rightsquigarrow ih \quad (5)$$

のような対応を考えることができるので、(1)~(4) は行列を用いて次のように表される。

$$\begin{pmatrix} -i\omega & -f & f^* & ik/\rho_0 \\ f & -i\omega & 0 & il/\rho_0 \\ -f^* & 0 & -i\omega & ih/\rho_0 \\ ik & il & ih & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ p \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (6)$$

よって $(u, v, w, p)^T$ が非自明解を持つためには (6) に現れる行列の行列式が 0 となる必要がある。すなわち

$$\begin{vmatrix} -i\omega & -f & f^* & ik/\rho_0 \\ f & -i\omega & 0 & il/\rho_0 \\ -f^* & 0 & -i\omega & ih/\rho_0 \\ ik & il & ih & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (7)$$

であり、これを解くと

$$\omega^2 = \frac{(f^*l + fh)^2}{k^2 + l^2 + h^2} \quad (8)$$

を得る。(計算は Appendix4.1 参照。) 特に今、(8) の分子について

$$f^*l + fh = \begin{pmatrix} 0 \\ f^* \\ f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k \\ l \\ h \end{pmatrix} \quad (9)$$

であり、角速度ベクトルが $\boldsymbol{\Omega} = \left(0, \frac{f^*}{2}, \frac{f}{2}\right)^T$ であることや波数ベクトルが $\mathbf{k} = (k, l, h)^T$ であることを考えれば (8) は

$$\omega^2 = \left(\frac{2\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}\right)^2 = 4\Omega^2 \left(\frac{\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{k}}{|\mathbf{k}||\boldsymbol{\Omega}|}\right)^2 = 4\Omega^2 \cos^2(\angle(\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{k})) \quad (10)$$

となる。ただし $\angle(\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{k})$ は $\boldsymbol{\Omega}$ と \mathbf{k} のなす角である。以上により、分散関係として以下を得る。

$$\omega(\mathbf{k}) = \pm\sqrt{4\Omega^2 \cos^2(\angle(\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{k}))} \quad (11)$$

これが、自転効果による非静水圧バランスを考えた場合に Poincare 波に対応する平面波であると考えられ、その分散関係を見るとこれは慣性波のものとなっている。^{*1*2} また分散関係が $\angle(\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{k})$ 依存性を持つことから、波の性質が自転軸との角度に依存して性質が変化することもわかる。

2 Kelvin 波に対応した波動解

次に、(1)~(4) で表される方程式の Kelvin 波に対応した解を考える。^{*3} いま浅水波方程式から Kelvin 波を導いた時と同様に側面境界が $x = 0$ にあると考え、流れがこの境界を横切らないと言う条件を次で与える。

$$u|_{x=0} = 0 \quad (12)$$

また流体は $z = 0 + \eta(x, y)$ のような表面を持つとし、無限深度で流れ及び圧力の変化分が 0 になると言う条件を次で与える。^{*4}

$$(u, v, p) \rightarrow 0 \quad (z \rightarrow -\infty) \quad (13)$$

またこれに加えて、Kelvin 波を考えた時と同様に遠方で振幅が 0 になると考えることにする。

$$(u, v, p) \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow \infty) \quad (14)$$

*1 参考：[1] (wikipedia の inertia wave の項)

2 普通慣性波というときは $f^ = 0$ とした場合のものを言うのだろうか…。ここの用語の定義が少しこんがらがっている。

*3 参考：[2] (正直あまりにも分からなかったので AI と相談しながら進めた。あまり自信はない。)

*4 これは自然な条件であると考えた。

この時 Kelvin 波と同様に $u \equiv 0$ となるような解を考える。いま (1)~(4) に $u \equiv 0$ を代入すれば、解くべき方程式は次で与えられる。

$$-fv + f^*w = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (15)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (16)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (17)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (18)$$

この時解として境界に沿って進む波動を考え、 $(u, v, p) \propto e^{i(l y - \omega t)}$ と仮定する。また $x \rightarrow \infty$ 及び $z \rightarrow -\infty$ での減衰の条件から $(u, v, p) \propto e^{-\alpha x + \kappa z}$ (ただし $\text{Re}\{\alpha\} > 0, \text{Re}\{\kappa\} > 0$) と考える。よって最終的に

$$(u, v, p) \propto e^{i(l y - \omega t)} e^{-\alpha x} e^{\kappa z} \quad (19)$$

と考え、これを (15)~(18) に代入すれば

$$-fV + f^*W = \frac{\alpha}{\rho_0} p \quad (20)$$

$$-i\omega V = -\frac{il}{\rho_0} p \quad (21)$$

$$-i\omega W = -\frac{\kappa}{\rho_0} p \quad (22)$$

$$ilV + \kappa W = 0 \quad (23)$$

を得る。ただし見やすさのために降流速を大文字で表すことにする。よってここから κ, ω, α を l を用いて表すことで解の特性を考察することを試みる。まず、(21) (22) (23) より

$$l^2 = \kappa^2 \rightsquigarrow \kappa = |l| \quad (24)$$

を得る。($\text{Re}\{\kappa\} > 0$ を用いている。) また今圧力の変化分 p を大気圧と静水圧の和からのずれとして定義すれば

$$P_{\text{atm}} + \rho_0 g(-z) + p = P_{\text{all}} \quad (25)$$

であり、自由表面で $P_{\text{all}} = P_{\text{atm}}$ となるから

$$\rho_0 g(-\eta) + p = 0 \rightsquigarrow \eta = \frac{p}{\rho_0 g} \quad (26)$$

となる。よって特に $z = 0$ の流体表面において $W = \partial\eta/\partial t$ でもあるので、合わせて

$$W = \frac{1}{\rho_0 g} \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{i\omega}{\rho_0 g} p \quad (27)$$

となる。^{*5} よって (27) を (22) に代入して、

$$\omega^2 = \kappa g \rightsquigarrow \omega = \pm\sqrt{g|\kappa|} \quad (28)$$

として分散関係を得る。最後に、(21) (23) (24) を (20) に代入すれば

$$f + if^* \operatorname{sgn}(l) + \frac{\alpha\omega}{l} = 0 \quad (29)$$

を得る。ただし $\operatorname{sgn}(l)$ は l の符号を表す。よって (28) の結果を代入して整理すれば最終的に以下を得る。

$$\alpha = \mp f \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{l}{\sqrt{|l|}} \mp if^* \sqrt{\frac{|l|}{g}} \quad (30)$$

ただし \mp は (28) の \pm と対応している。

以上より、 $e^{i(l y - \omega t)} e^{-\alpha x} e^{\kappa z}$ の形で与えられる解について κ, ω, α を求めることができた。特に、北半球 (すなわち $f > 0$) を仮定し l の符号を定めると、 $\operatorname{Re}\{\alpha\} > 0$ という条件から (30) の符号が決まり結果として (28) の分散関係における符号も決まる。よって l の符号ごとに結果をまとめると次のよう。

$$\begin{cases} \kappa = l, \quad \omega = -\sqrt{gl}, \quad \alpha = \left\{ f\sqrt{\frac{l}{g}} + if^*\sqrt{\frac{l}{g}} \right\} & (l > 0) \quad (31a) \\ \kappa = -l, \quad \omega = \sqrt{-gl}, \quad \alpha = \left\{ f\sqrt{\frac{-l}{g}} - if^*\sqrt{\frac{-l}{g}} \right\} & (l < 0) \quad (31b) \end{cases}$$

この結果を見ると、まず α が虚部を持つことに気づく。すなわちこれは $x > 0$ 方向に波が減衰しながら振動していることを意味し、これは浅水波における結果との相違点となっている。また位相速度群速度はそれぞれ

$$\begin{cases} c_p = -\sqrt{\frac{g}{l}} < 0, \quad c_g = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{l}} < 0 & (l > 0) \quad (32a) \\ c_p = -\sqrt{\frac{g}{-l}} < 0, \quad c_g = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{-l}} < 0 & (l < 0) \quad (32b) \end{cases}$$

となっており、いずれの場合においても負となっている。すなわち今考えているような $f > 0$ かつ $x = 0$ に境界があり $x > 0$ に流体があるような状況 (すなわち北半球において西岸を境界と考えるような流れ) においてはこの波は必ず南向きに進むとわかる。(※ より簡潔には、 $\operatorname{Re}\{\alpha\} > 0$ の条件から

$$\operatorname{Re}\{\alpha\} = -\frac{fl}{\omega} > 0 \rightsquigarrow \text{for } f > 0; c_p = \frac{\omega}{l} < 0 \quad (33)$$

のようにして波の一方方向性が示される。^{*6})

3 References

- [1] https://en.wikipedia.org/wiki/Inertial_wave
 [2] <https://dl.ndl.go.jp/pid/10598220>

^{*5} 自由表面を考える方法が正しいのか分からないが、こうしないとおそらく分散関係が出ない。

^{*6} すなわち波の減衰が波の一方方向性を要請していると思われる。

4 Appendix

4.1 行列式の計算

(7) 式の計算の詳細は以下のよう。

$$\begin{vmatrix} -i\omega & -f & f^* & ik/\rho_0 \\ f & -i\omega & 0 & il/\rho_0 \\ -f^* & 0 & -i\omega & ih/\rho_0 \\ ik & il & ih & 0 \end{vmatrix} \propto -k \begin{vmatrix} -f & f^* & k \\ -i\omega & 0 & l \\ 0 & -i\omega & h \end{vmatrix} + l \begin{vmatrix} -i\omega & f^* & k \\ f & 0 & l \\ -f^* & -i\omega & h \end{vmatrix} - h \begin{vmatrix} -i\omega & -f & k \\ f & -i\omega & l \\ -f^* & 0 & h \end{vmatrix} \quad (34)$$

$$= -k \left\{ i\omega \begin{vmatrix} -f & k \\ -i\omega & l \end{vmatrix} + h \begin{vmatrix} -f & f^* \\ -i\omega & 0 \end{vmatrix} \right\} + l \left\{ -f \begin{vmatrix} f^* & k \\ -i\omega & h \end{vmatrix} - l \begin{vmatrix} -i\omega & f^* \\ -f^* & -i\omega \end{vmatrix} \right\} \quad (35)$$

$$-h \left\{ -f^* \begin{vmatrix} -f & k \\ -i\omega & l \end{vmatrix} + h \begin{vmatrix} -i\omega & -f \\ f & -i\omega \end{vmatrix} \right\}$$

$$= -k \{ -iflw - k\omega^2 + if^*h\omega \} + l \{ -ff^*h - ifk\omega + l\omega^2 - f^{*2}l \} - h \{ ff^*l + -if^*k\omega - h\omega^2 + f^2h \} \quad (36)$$

$$= (k^2 + l^2 + h^2)\omega^2 - (f^{*2}l^2 + 2ff^*hl + f^2h^2) \quad (37)$$

$$= (k^2 + l^2 + h^2)\omega^2 - (f^*l + fh)^2 \quad (38)$$

よって行列式 = 0 という条件から (8) を得る。