

地球流体力学 II レポート課題 2

05-242628 三田村彰大

January 29, 2026

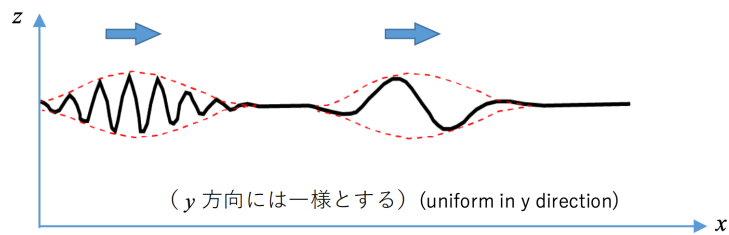


Figure1: 問題文中より抜粋

授業で求めたポアンカレ波の分散関係は $\omega^2 = f^2 + gH(k^2 + l^2)$ であったが、今回は水平方向に一次元の波を考えているから $l = 0$ として良い。よってこの場合の分散関係は以下ようになる。

$$\omega(k)^2 = f^2 + gHk^2 \quad \sim \quad \omega(k) = \sqrt{f^2 + gHk^2} \quad (1)$$

特に今考えたいのは一方向への伝播の様子であるから $k > 0$ かつ $\omega(k) > 0$ と考えて良い。この時位相速度と群速度はそれぞれ、

$$c_p = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\left(\frac{f}{k}\right)^2 + gH} \quad (2)$$

$$c_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{gH}{\sqrt{(f/k)^2 + gH}} \quad (3)$$

となる。これを模式的に表すと以下のよう。

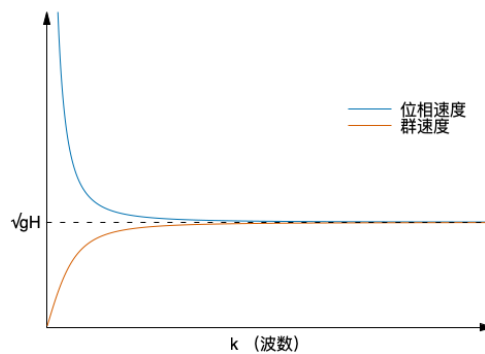


Figure2: 位相速度と群速度の模式図

Figure2で特に注目すべきなのは、 k が大きくなるほど群速度 c_g も大きくなることである。これはすなわち、短波の packets (Figure1の後方の波に相当) ほど波束が速く進むことを意味し、よって考えている状況では「後方の短波 packets が前方の長波 packets に追いつく」ということがわかる。^{*1}

また Figure2を見るとわかるように、 k 小では $c_g < c_p$ となっているのに対し k 大では $c_p \sim c_g$ となっている。よって長波 packets (k 小) においては包絡線の中を位相がどんどん前に抜けていくように波が進んでいく (位相が包絡線を追い越す) が、短波 packets (k 大) においては位相と包絡線が一緒になって進むと予想される。

また波束の広がり (分散) については $\omega(k)$ の二回微分を考えればよい。実際、いま packets が Δk だけの波束成分を持っていると仮定すると波束内での群速度差は

$$\Delta c_g \approx \frac{dc_g}{dk} \Delta k = \frac{d^2\omega}{dk^2} \Delta k \quad (4)$$

と見積もられ、よって Δt 後の波束 (包絡線) の広がり

$$\Delta x \approx \Delta c_g \Delta t \quad (5)$$

と見積もることができる。よって (4) (5) から $\Delta x \propto |d^2\omega/dk^2|$ となり波束の広がり Δx と $\omega(k)$ の二回微分が対応している。

よって具体的に $\omega(k)$ の二回微分を計算すると、

$$\frac{d^2\omega}{dk^2} = \frac{gHf^2}{(f^2 + gHk^2)^{3/2}} \quad (6)$$

となっており、 $k < \infty$ で $d^2\omega/dk^2 > 0$ であるから長波 packets (k 小) においては徐々に波束が広がってゆく (ピークが潰れてゆく) ことがわかる。また $k \rightarrow \infty$ においては $d^2\omega/dk^2 \sim 0$ となっており、短波 packets (k 大) においては波束は形をほとんど崩すことなく進んでゆくことがわかる。

最後に、後方の短波 packets が前方の長波 packets に追いついた瞬間について考えるが、いま慣性重力波を与える (微小振幅近似した) 浅水方程式は線形であるから、結局追いついた波についても線形重ね合わせが成立することがわかる。よって短波 packets はその形を失うことなく長波 packets を追い越すことがわかる。

以上の考察をもとに波の実況中継を行うと以下のようなになる。

1. 開始状態

- (a) 後方の短波 packets が位相と群速度を一致させながら波束の形をほとんど崩さずに速く進む
- (b) 前方の長波 packets が位相が群速度を追い越しながら、また波束が潰れながらゆっくり進む

2. 後方の短波 packets が前方の packets に追いつく

3. 後方の packets と前方の packets が重なる

4. 後方の packets が前方の packets を完全に追い越す。またこの追い越しの前後でお互いの波は形状を保存する。

5. 最終的に、前方に最初とほとんど形の変わらない短波 packets が進み、後方に潰れた長波 packets が置いていかれる。

^{*1} 短波 packets ・長波 packets という言い方は果たして正しいのだろうか…