

地球物理数値解析課題（武村教員分）

05242628 三田村彰大

課題 1

(a)

3次元等方線形弾性体の運動方程式と構成方程式は次のようになっている。

$$\rho \ddot{u}_p = \frac{\partial \sigma_{xp}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yp}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zp}}{\partial z} + f_p \quad (1)$$

$$\sigma_{pq} = \lambda \delta_{pq} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \mu \left(\frac{\partial u_q}{\partial x_p} + \frac{\partial u_p}{\partial x_q} \right) \quad (2)$$

(ただし上の式において $p, q = x, y, z$ である。) ここで、変位 u について $\dot{u} = v$ を用いることで方程式を速度に関する式に書き換えれば、上の方程式系は

$$\rho \dot{v}_p = \frac{\partial \sigma_{xp}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yp}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zp}}{\partial z} + f_p \quad (3)$$

$$\dot{\sigma}_{pq} = \lambda \delta_{pq} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + \mu \left(\frac{\partial v_q}{\partial x_p} + \frac{\partial v_p}{\partial x_q} \right) \quad (4)$$

となる。こうすることで (1) (2) 式の2階の微分方程式系が (3) (4) の一階の微分方程式系になり解きやすくなる。これが、方程式系を変位応力ではなく速度応力で記述することのメリットである。

(b)

地震波伝播計算においては、スタッガード格子を用いることで運動方程式に現れる空間一階微分を更新対象となる物理量を中心とした中心差分で評価できるようになり、計算量を増やさずに精度を上げることができる。これが地震波伝播計算でスタッガード格子が好まれる理由である。

(c)

スタッガード格子を用いた地震波伝播計算においても、通常の数値計算同様 CFL 条件を満たすよう格子間隔を適切に定める必要がある。また、スタッガード格子に特有の注意点として、物性値の値の配置位置が評価したい値の配置位置と一致しないという問題が生じうる。特に媒質が不均一な場合は物性値の値が格子ごとに異なる可能性があり、平均媒質を導入するなどしてこの問題を考慮する必要がある。

(d)

今、空間4次精度のスタッガード格子における微分の離散化スキームは次のように与えられる。

$$\frac{df(x)}{dx} \approx \frac{1}{\Delta x} \left\{ -\frac{1}{24} f\left(x + \frac{3\Delta x}{2}\right) + \frac{9}{8} f\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) - \frac{9}{8} f\left(x - \frac{\Delta x}{2}\right) + \frac{1}{24} f\left(x - \frac{3\Delta x}{2}\right) \right\} \quad (5)$$

よって $f(x) = \exp(ikx)$ 、 $x = n(\Delta x)$ を代入すると、

$$\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=n\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \left[-\frac{1}{24} \exp\left\{ik\left(n\Delta x + \frac{3\Delta x}{2}\right)\right\} + \frac{9}{8} \exp\left\{ik\left(n\Delta x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right\} - \frac{9}{8} \exp\left\{ik\left(n\Delta x - \frac{\Delta x}{2}\right)\right\} + \frac{1}{24} \exp\left\{ik\left(n\Delta x - \frac{3\Delta x}{2}\right)\right\} \right] \quad (6)$$

となり、これを計算して整理すると

$$\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=n\Delta x} = i \times \underbrace{\frac{-\frac{1}{24} \sin\left(\frac{3k\Delta x}{2}\right) + \frac{9}{8} \sin\left(\frac{k\Delta x}{2}\right)}{\Delta x/2}}_{k_e} \times \exp(ikn\Delta x) \quad (7)$$

として実効的な波数 k_e を求めることができる。よって解析解との誤差 $(k - k_e)/k$ を格子幅に対してプロットすると Figure1 のようになることがわかる。

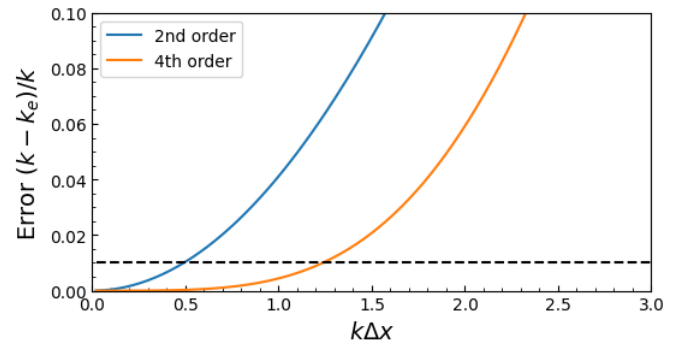


Figure1: $k\Delta x$ に対する $(k - k_e)/k$ のプロット。青線が2次精度のスタッガード格子の場合、オレンジ線が4次精度スタッガード格子の場合。黒線は $(k_e - k)/k \equiv 1\%$ を示している。

Figure1を見ると、4次精度のスタッガード格子を用いたことにより誤差 $(k - k_e)/k$ が (2次精度を用いた場合に比べて) 改善していることがわかる。また、4次精度の場合に誤差が $\lesssim 1\%$ となるのは $k\Delta x \lesssim 1.2$ の時であり、波長に関する式に直すと誤差が $\lesssim 1\%$ となる条件は次のようにかける。

$$\frac{\lambda}{\Delta x} \gtrsim \frac{2\pi}{1.2} \approx 5.2 \quad (8)$$

よって4次精度のスタッガード格子では1波長あたりに必要な格子の数が $\gtrsim 5$ と分かる。

(e)

実際の地球は完全弾性体ではないため、地震波のエネルギーが熱などに変換されることによって生じる減衰（非弾性減衰）がみられ

る。そのためより現実に即した地震波伝播計算を行うためにはこの非弾性減衰を何らかの手法で実装する必要があり、その手法として Graves Q と Generalized Zener Body が知られている。

Graves Q

Graves Q は Graves(1996) によって提案された手法であり、速度の計算において各ステップ毎に

$$v_i \leftarrow v_i \times \exp\left(-\frac{\pi f_0 \Delta t}{Q_0}\right) \quad (9)$$

のように減衰項 $\exp\left(-\frac{\pi f_0 \Delta t}{Q_0}\right)$ を乗ずることで減衰を表現する。この時 n ステップ後における減衰率は

$$\begin{aligned} (\text{減衰率})_{\text{numerical}} &= \left(\exp\left(-\frac{\pi f_0 \Delta t}{Q_0}\right) \right)^n = \exp\left(-\frac{\pi f_0 t}{Q_0}\right) \end{aligned} \quad (10)$$

のようになる。

ここで解析的な減衰率を考える。今、1 波長あたりのエネルギーの減衰率を

$$Q^{-1} := -\frac{1}{2\pi} \frac{\Delta E}{E} \quad (11)$$

として Q で表す時、時間 t が経過した後の波の減衰率は

$$(\text{減衰率})_{\text{analytical}} = \exp\left(-\frac{\pi f t}{Q}\right) \quad (12)$$

となる。よって、(10) と (12) を見比べれば、Graves Q においては実質的に

$$Q = Q_0 \frac{f}{f_0} \quad (13)$$

で表されるような Q が実装されているとわかる。

Graves Q の特徴

上記の考察から、Graves Q においては

- Q が強い周波数依存性を持つてしまう ($f = f_0$ の時だけ想定した Q_0 による減衰が実現する)

といった問題が生じてしまうことがわかる。また、その実装の仕方故に P 波と S 波の Q を分けることができないという問題も生じてしまう。ただし、後述する Generalized Zener Body と比べると計算量が少なく済むという利点も持ち合わせている。

Generalized Zener Body

Zener body では粘弾性体を考えることにより非弾性減衰を再現する。まず、最も簡単な例として Figure2 左図のような粘性率 η のダッシュポットと弾性率 G_1, G_2 のバネからなる一次元の粘弾性モデルを考える。この時、構成方程式は

$$\sigma + \tau_\sigma \dot{\sigma} = M_R (\varepsilon + \tau_\varepsilon \dot{\varepsilon}) \quad (14)$$

$$\text{ただし } \begin{cases} \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ \tau_\sigma = \frac{\eta}{G_1 + G_2}, \tau_\varepsilon = \frac{\eta}{G_1}, M_R = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2} \end{cases}$$

のようになり、ここに

$$u = u_0 \exp(ikx) \exp\left(-\frac{\omega x}{2cQ}\right) \quad (15)$$

のような減衰波解を代入すれば、($\varepsilon = \partial u / \partial x$ などを用いて)

$$Q^{-1} = \frac{\omega (\tau_\varepsilon - \tau_\sigma)}{1 + \omega^2 \tau_\varepsilon \tau_\sigma} \quad (16)$$

として Q が求まる。よって Zener body においては上記 Q で表されるような減衰が実装されることになる。

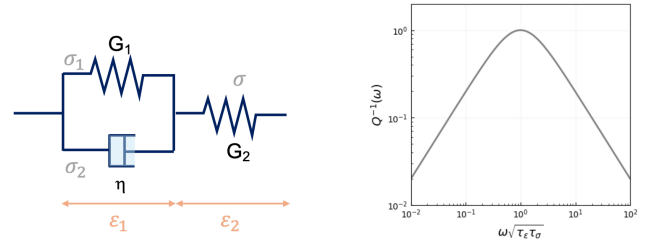


Figure2: 粘弾性モデルの概略図 (左) と、Zener body における Q の周波数依存性 (右)。画像は授業スライドより抜粋。

この時、 Q の周波数依存性は Figure2 右図のようになり、Graves Q で現れた Q の周波数依存性の問題は解決していない。そこで、Figure3 左図のように Zener Body を並列接続することを考える。こうすることで、 Q の周波数依存性を改善することができる。(Figure3 右図参照。)

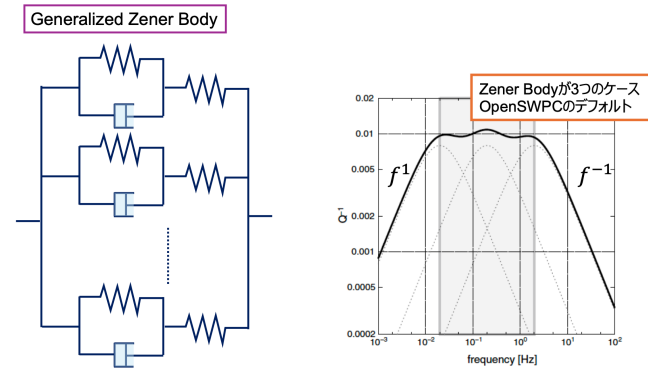


Figure3: Generalized Zener Body (左) と、Generalized Zener Body における Q の周波数依存性 (右)。画像は授業スライドより抜粋。

また、実際には三次元に拡張した Zener Body を考えることになる。この時、最終的には構成方程式は次のように書き表されることになる。^{*1}

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} = \delta_{ij} \lambda_U \frac{\partial v_k}{\partial x_k} + \mu_U \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) + r_{ij} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_{ij}}{\partial t} + \frac{1}{\tau_\sigma} r_{ij} = & -\frac{1}{\tau_\sigma} \left\{ \delta_{ij} \left[(\lambda_R + 2\mu_R) \left(1 - \frac{\tau_\varepsilon^{(P)}}{\tau_\sigma} \right) - 2\mu_R \left(1 - \frac{\tau_\varepsilon^{(S)}}{\tau_\sigma} \right) \right] \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right. \\ & \left. + \mu_R \left(1 - \frac{\tau_\varepsilon^{(S)}}{\tau_\sigma} \right) \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \right\} \end{aligned} \quad (18)$$

(すなわち弾性体の構成方程式に r_{ij} (メモリ変数) が付随した形になる。) この時、P 波 S 波それぞれに対し設定された $\tau_\varepsilon^{(P)}, \tau_\varepsilon^{(S)}$ に対し、 Q_P, Q_S はそれぞれ

^{*1} 詳細な議論は授業スライドにある通りなので割愛。

$$Q_P^{-1} = \frac{\omega(\tau_\varepsilon^{(P)} - \tau_\sigma)}{1 + \omega^2 \tau_\varepsilon^{(P)} \tau_\sigma} \quad (19)$$

$$Q_S^{-1} = \frac{\omega(\tau_\varepsilon^{(S)} - \tau_\sigma)}{1 + \omega^2 \tau_\varepsilon^{(S)} \tau_\sigma} \quad (20)$$

のようになり、Zener Body では P 波と S 波の Q を別々に実装することができる。

Generalized Zener Body の特徴

上記の考察から、Generalized Zener Body においては

- Zener Body を並列に接続したモデルを考えることで Q を (近似的に) 一定値にすることができる
- Q_P, Q_S を別々に実装することができる

という利点があることがわかる。ただし、Generalized Zener Body においては並列接続した Zener Body の分だけメモリ変数の保持・更新が必要になり計算機への負荷が大きくなってしまいうという欠点もある。

実践的なシミュレーションにおける手法の比較

以上を踏まえると、実践的な地震波伝播シミュレーションにおいては理想的には Generalized Zener Body を用いることが望ましいと考えられる。ただし、手元のノートブックで簡易的なコードを走らせる場合や、減衰が重要でない場合などは、計算量を削減するという意味で Graves Q にも利用価値があると思われる。

(f)

地表 (または海底面) における境界条件の取り扱いを考える。今、空間 4 次差分法で計算している場合を考え、真空境界条件によって境界条件を考慮することを考えてみる。この時、授業と同様のノートーションを考え (Figure4 参照)、境界層 ($k = KFS$) で σ_{zz} の z 方向微分を 4 次中央差分により評価すると、トラクションフリーの条件から

$$\begin{aligned} & \left[D_z^{(4)} \sigma_{zz} \right]_{KFS} \\ &= \frac{1}{\Delta z} \left\{ -\frac{1}{24} \sigma_{zz} \left(KFS + \frac{3}{2} \right) + \frac{9}{8} \sigma_{zz} \left(KFS + \frac{1}{2} \right) \right. \\ & \quad \left. - \frac{9}{8} \sigma_{zz} \left(KFS - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{24} \sigma_{zz} \left(KFS - \frac{3}{2} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{\Delta z} \left\{ -\frac{1}{24} \sigma_{zz} \left(KFS + \frac{3}{2} \right) + \frac{9}{8} \sigma_{zz} \left(KFS + \frac{1}{2} \right) \right\} \quad (21) \end{aligned}$$

のようになる。

しかし、真空境界条件では境界において σ_{zz} の微分は本来不連続であり、真の値 $\left[D_z^{(4)} \sigma_{zz} \right]_{KFS}^{\text{true}}$ は片側差分を用いて評価されなければならない。すなわち

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} \left(KFS + \frac{1}{2} \right) &= \sigma_{zz}(KFS) + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \frac{\Delta z}{2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial z^2} \left(\frac{\Delta z}{2} \right)^2 \\ & \quad + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \sigma_{zz}}{\partial z^3} \left(\frac{\Delta z}{2} \right)^3 + \mathcal{O}(\Delta z^4) \end{aligned} \quad (22)$$

のようなテイラー展開を $KFS + \frac{1}{2}, KFS + \frac{3}{2}, KFS + \frac{5}{2}, KFS + \frac{7}{2}$ まで

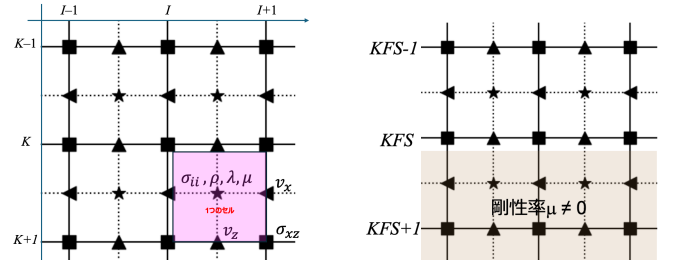


Figure4: スタッガード格子における変数の配置(左図)と、境界層 $k = KFS$ の模式図 (右図)。画像は授業スライドより抜粋。

考えて連立させることで得られる $\partial \sigma_{zz} / \partial z$ が真の値 $\left[D_z^{(4)} \sigma_{zz} \right]_{KFS}^{\text{true}}$ であり、これは先に 4 次中央差分で計算した $\left[D_z^{(4)} \sigma_{zz} \right]_{KFS}$ とは一致しない。

そこで、境界面では 2 次精度で空間微分を評価することを考える。この時再びトラクションフリーの条件から、

$$\begin{aligned} & \left[D_z^{(2)} \sigma_{zz} \right]_{KFS} \\ &= \frac{1}{\Delta z} \left\{ \sigma_{zz} \left(KFS + \frac{1}{2} \right) - \underbrace{\sigma_{zz} \left(KFS - \frac{1}{2} \right)}_{=0} \right\} \\ &= \frac{1}{\Delta z} \left\{ \sigma_{zz} \left(KFS + \frac{1}{2} \right) \right\} \quad (23) \end{aligned}$$

となるが、真の値 $\left[D_z^{(2)} \sigma_{zz} \right]_{KFS}^{\text{true}}$ は片側差分から

$$\begin{aligned} & \left[D_z^{(2)} \sigma_{zz} \right]_{KFS}^{\text{true}} \\ &= \frac{1}{\Delta z/2} \left\{ \sigma_{zz} \left(KFS + \frac{1}{2} \right) - \underbrace{\sigma_{zz}(KFS)}_{=0} \right\} \\ &= \frac{1}{\Delta z/2} \left\{ \sigma_{zz} \left(KFS + \frac{1}{2} \right) \right\} \quad (24) \end{aligned}$$

となるのでやはり $\left[D_z^{(2)} \sigma_{zz} \right]_{KFS}$ は $\left[D_z^{(2)} \sigma_{zz} \right]_{KFS}^{\text{true}}$ と一致しない。しかし、 $\partial \sigma_{zz} / \partial z$ を実際に用いる速度場の更新の式を思い出すと

$$v_{z,KFS}^{n+1} = v_{z,KFS}^n + \frac{1}{\bar{\rho}_z} \left[D_z^{(2)} \sigma_{zz} \right]_{KFS} \Delta t + \dots \quad (25)$$

のようになっていることがわかり、特に v_z が配置されている位置での密度 $\bar{\rho}_z$ は平均媒質の考え方をを用いて

$$\bar{\rho}_z = \frac{1}{2} \left(\underbrace{\rho \left(KFS + \frac{1}{2} \right)}_{=\rho(KFS)} + \underbrace{\rho \left(KFS - \frac{1}{2} \right)}_{=\delta \approx 0} \right) \quad (26)$$

$$\approx \frac{1}{2} \rho(KFS) \quad (27)$$

と計算されるのでこれを (25) 式に代入すれば

$$v_{z,KFS}^{n+1} = v_{z,KFS}^n + \frac{2}{\rho(KFS)} \left[D_z^{(2)} \sigma_{zz} \right]_{KFS} \Delta t + \dots \quad (28)$$

$$= v_{z,KFS}^n + \frac{1}{\rho(KFS)} \left[D_z^{(2)} \sigma_{zz} \right]_{KFS}^{\text{true}} \Delta t + \dots \quad (29)$$

となり 2 が相殺して最終的には正しく計算が行われていることがわかる。^{*2}

^{*2} 途中で $2 \left[D_z^{(2)} \sigma_{zz} \right]_{KFS} = \left[D_z^{(2)} \sigma_{zz} \right]_{KFS}^{\text{true}}$ を用いた。

よって、真空境界条件を考える場合では境界で空間 2 次精度を用いることで正しく計算を行うことができる。これが境界面について空間 2 次精度が望ましい理由である。

課題 3

地震波伝播シミュレーションの概要を理解することができた。特に、吸収境界や非弾性減衰の実装、不均質媒質における計算の方法などのテクニカルな話をたくさん聞くことができたのはよかったと思う。(離散化スキームの話や安定性条件、スタッガード格子など、他の教員ですでに扱った基礎的な話を土台に授業が進んでいくのが非常によかったと思う。)

また、堆積層と長周期地震動の話は非常に興味深かった。実際にシミュレーションが社会の役に立つ例として分かりやすかったと思う。

強いて言えば、固体パートのレポート提出が期末週間と被ってしまったために課題 2 に取り組む時間がなかったことが悔やまれる。もう少し時間に余裕を持ってタスクを処理できるような人間になりたい。

以上