

地球物理数値解析課題（升本教員分）

05242628 三田村彰大

概要 浅水波方程式系に従う海洋領域の海面の時間発展をリープフロッグスキームにより計算した。その際空間方向については Arakawa-C グリッドを用いて離散化し、初期条件としてガウス分布に従う海面偏差を与えた。結果、比較的速い Kelvin 波・慣性重力波と、初期に与えた偏差が西へ伝播する遅いロスビー波を確認できた。

※ コード置き場：https://github.com/ramutami/report2_geoanalysis

※ 動画置き場：https://shota-mitamura.com/works/geo_analysisiskadai2/kadai/

1 はじめに

海面表層の運動を記述する最も単純な方程式系として浅水波方程式系を考えることができる。このとき、境界がありかつコリオリパラメタが緯度とともに変化するような状況では Kelvin 波・慣性重力波・ロスビー波が現れることが期待される。今回はこの浅水波方程式系をリープフロッグおよび Arakawa-C グリッドを用いて離散化し、数値計算を用いて海面の変動を観察する。ただし計算には Fortran を使い、可視化は gnuplot および ffmpeg で行った。

2 理論式

下記の浅水波方程式系を考える。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = fv - g' \frac{\partial h}{\partial x} + A \nabla^2 u \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -fu - g' \frac{\partial h}{\partial y} + A \nabla^2 v \quad (2)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -H \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (3)$$

ただし u, v, h はそれぞれ東西方向の流速、南北方向の流速、水深の偏差であり、 g', f, H はそれぞれ有効重力、コリオリパラメタ、平均水深である。

3 数値計算スキーム

3.1 時間方向の離散化スキーム

時間方向についてはリープフロッグスキームを用いることにする。すなわち今 $(u, v, h)^T = \mathbf{x}$ として (1)~(3) の理論式を

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (4)$$

のようにまとめて書くとき、 $\partial \mathbf{x} / \partial t = (\mathbf{x}^{n+1} - \mathbf{x}^{n-1}) / 2\Delta t$ と考えることで $\mathbf{x}$ の更新式として次を得る。

$$\mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}^{n-1} + 2\Delta t \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}^n) \quad (5)$$

ただし $\mathbf{x}^n$ が現在での $\mathbf{x}$ の値、 $\mathbf{x}^{n-1}, \mathbf{x}^{n+1}$ がそれぞれ 1 ステップ前および 1 ステップ後の値である。

3.2 空間方向の離散化スキーム

今、計算空間を緯度 $20^\circ N \sim 40^\circ N$ および経度 $0^\circ E \sim 60^\circ E$ にとり、経度方向の離散化を $i = 1 \sim \text{im}$ 、緯度方向の離散化を $j = 1 \sim \text{jm}$ で表すことにする。(Figure1参照。)

その上で、空間方向については Arakawa-C グリッドによる離散化を行う。(Figure2参照。) すなわち、第 i, j 番目のセルの中心に h_{ij} を配置し、セルの左辺に u_{ij} を、セルの下辺に v_{ij} を配置する。また、緯度 ϕ_j およびセルの横幅 Δx_j (緯度によって異なる) をセル中心の高さで評価することにする。

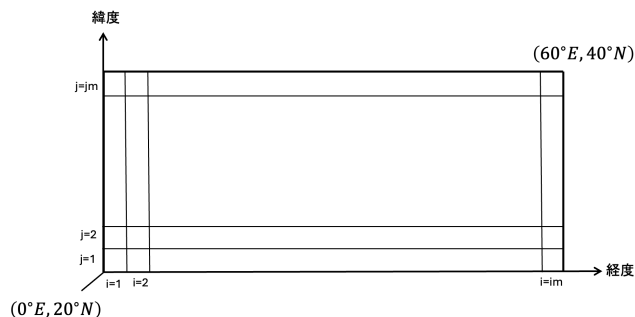


Figure1: 空間方向の格子の配置

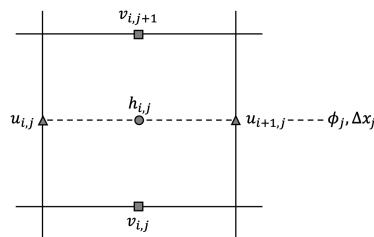


Figure2: Arakawa-C グリッドによる離散化スキーム

このとき、 u, v, h について必要なメモリは次のようになる。

$$u[1 : \text{im} + 1, 1 : \text{jm}] \quad (6)$$

$$v[1 : \text{im}, 1 : \text{jm} + 1] \quad (7)$$

$$h[1 : \text{im}, 1 : \text{jm}] \quad (8)$$

また、値が定義されていない位置での値は平均を取ることによって評価することにする。

4 計算の実装

4.1 u の更新

(1) 式で表される u の時間発展の式を先に述べた方法によって離散化すると次のようになる。

$$u_{ij}^{n+1} = u_{ij}^{n-1} + 2\Delta t \left\{ 2\Omega \sin \phi_j \frac{v_{i-1,j}^n + v_{i-1,j+1}^n + v_{i,j}^n + v_{i,j+1}^n}{4} - g' \frac{h_{ij}^n - h_{i-1,j}^n}{\Delta x_j} + A \left(\frac{u_{i+1,j}^{n-1} - 2u_{i,j}^{n-1} + u_{i-1,j}^{n-1}}{(\Delta x_j)^2} + \frac{u_{i,j+1}^{n-1} - 2u_{i,j}^{n-1} + u_{i,j-1}^{n-1}}{(\Delta y)^2} \right) \right\} \quad (9)$$

基本的には (5) 式に沿うが、拡散項だけは過去の値 (u^{n-1}) を用いて計算していることに注意。

このとき、(6)～(8) で与えられる u, v, h のもとで上式を計算すると u については $u[2 : \text{im}, 2 : \text{jm} - 1]$ についての値しか得ることができず、 $i = 1, \text{im} + 1$ および $j = 1, \text{jm}$ における u の値を別途境界条件として与える必要がある。

4.2 v の更新

同様にして (2) 式を離散化すれば、 v の更新式を次のように得る。

$$v_{ij}^{n+1} = v_{ij}^{n-1} + 2\Delta t \left\{ -2\Omega \sin \frac{\phi_{j-1} + \phi_j}{2} \frac{u_{i,j}^n + u_{i+1,j}^n + u_{i+1,j-1}^n + u_{i,j-1}^n}{4} - g' \frac{h_{i,j}^n - h_{i,j-1}^n}{\Delta y} + A \left(\frac{v_{i+1,j}^{n-1} - 2v_{i,j}^{n-1} + v_{i-1,j}^{n-1}}{\left(\frac{\Delta x_j + \Delta x_{j-1}}{2} \right)^2} + \frac{v_{i,j+1}^{n-1} - 2v_{i,j}^{n-1} + v_{i,j-1}^{n-1}}{(\Delta y)^2} \right) \right\} \quad (10)$$

ただし u の場合と同様、拡散項のみ過去の値 (v^{n-1}) を用いて計算している。

このとき、(6)～(8) で与えられる u, v, h のもとで上式を計算すると v については $v[2 : \text{im} - 1, 2 : \text{jm}]$ についての値しか得ることができず、 $i = 1, \text{im}$ および $j = 1, \text{jm} + 1$ における v の値を別途境界条件として与える必要がある。

4.3 h の更新

同様にして (3) を離散化すれば、 h の更新式を次のように得る。

$$h_{i,j}^{n+1} = h_{i,j}^{n-1} + 2\Delta t \left\{ -H \left(\frac{u_{i+1,j}^n - u_{i,j}^n}{\Delta x_j} + \frac{v_{i,j+1}^n - v_{i,j}^n}{\Delta y} \right) \right\} \quad (11)$$

このとき h については境界条件を定める必要はない。

4.4 境界条件

これまでの考察から、壁面での u, v の値を境界条件として与える必要があることがわかる。そこで今回は壁面における流れが 0 という境界条件を課すことにする。これを数式で表すと次のよう。(図

Figure3参照。)

$$u_{1,j} = u_{\text{im}+1,j} = u_{i,1} = u_{i,\text{jm}} = 0 \quad (12)$$

$$v_{1,j} = v_{\text{im},j} = v_{i,1} = v_{i,\text{jm}+1} = 0 \quad (13)$$

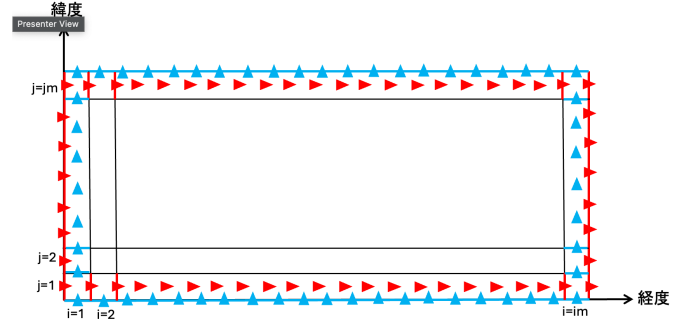


Figure3: 境界条件の模式図。図の赤矢印で表した位置の u および青矢印で表した位置の v を 0 とし計算する。

4.5 初期条件・パラメタの設定

今回初期条件として東岸付近にガウス分布のような正の h 偏差を与える。(Figure4参照。) また初期流速については計算領域全体で 0 とする。

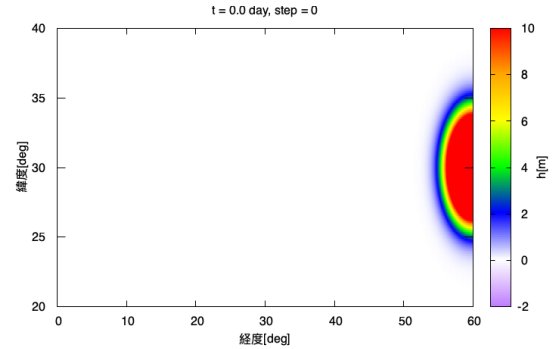


Figure4: 今回の計算で用いる初期条件。

具体的な式としては次のようになる。

$$h_{i,j}^0 = s \times \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 (\sigma_x^2 + \sigma_y^2)}} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{(\lambda(i) - \lambda_{\text{東岸}})^2}{\sigma_x^2} + \frac{(\phi(j) - \phi_{30^\circ N})^2}{\sigma_y^2} \right) \right\} \quad (14)$$

ただし λ, ϕ はそれぞれ経度・緯度を表し、 σ_x, σ_y, s は分布の形状を決めるパラメタである。今回は初期条件の形状を観察しながらこれらのパラメタを決定し、

$$\sigma_x = \sigma_y = 2^\circ, s = 0.5 \quad (15)$$

と決定している。^{*1}

*1 ただし実際の計算では $\lambda, \phi, \sigma_x, \sigma_y$ は rad 単位で計算している。

4.6 安定化スキーム

今回、計算の安定化のために3ステップに一度 Asselin Filter による平滑化を行っている。具体的にはそれぞれの更新スキームに従って $\mathbf{x}^{n+1}$ を計算したのち、

$$\mathbf{x}^n = \mathbf{x}^n + 0.5\gamma (\mathbf{x}^{n+1} - 2\mathbf{x}^n + \mathbf{x}^{n-1}) \quad (16)$$

によって現在の時間ステップにおける $\mathbf{x}$ の値を更新している。(ただし $\mathbf{x} = (u, v, h)^T$ である。)

4.7 パラメタの設定

今回、計算に用いるパラメタは問題文を参考に次のように決定した。

$$\begin{aligned} H &= 750 \text{ m} \\ A &= 1.0 \text{ m}^2/\text{s} \\ \Omega &= 7.2921159 \times 10^{-5} \text{ rad/sec} \\ g &= 0.02 \text{ m/s}^2 \end{aligned} \quad (17)$$

$$\gamma = 0.005 \quad (18)$$

$$\Delta t = 5 \times 10^{-3} \text{ day}$$

$$T_{\max} = 1 \text{ year}$$

5 結果

$T_{\max} = 1$ 年 だけ時間発展を行った結果を[動画置き場](#)に置いている。

まず計算開始直後の $t = 4$ day での様子 (Figure5参照。)を見ると、境界に沿って伝わる波と南西向きに進む波の二つが比較的早い段階から現れていることがわかり、前者が Kelvin 波、後者が慣性重力波に対応していることがわかる。

また、1 年の時間発展が終わった後の様子 (Figure6参照。)を見ると、Kelvin 波と慣性重力波が粘性により消失しており、初期条件で与えたガウス分布が傾きながら西に進んでいることがわかる。これはロスビー波に対応していることがわかる。

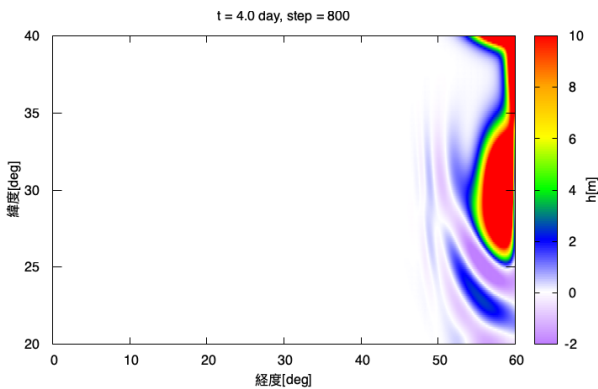


Figure5: 計算開始直後の $t = 4$ day での様子。初期ガウス分布の南西側に弱い慣性重力波が、初期ガウス分布の北側に境界を伝わる Kelvin 波が現れていることがわかる。

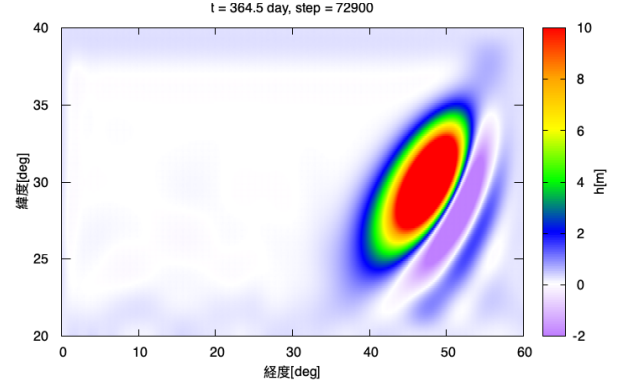


Figure6: 1 年間計算を行った後の海面の様子。Kelvin 波および慣性重力波が消失し、初期ガウス分布が西に伝播していることがわかる。

6 おわりに

今回、比較的単純な方程式系を用いた浅水波のシミュレーションを行い、Kelvin 波・慣性重力波・ロスビー波が現れることを確認できた。また、Fortran を用いて計算をゴリ押したことで非常に滑らかな動画を作成することができた。