べっせるべっせる

三田村彰大

November 2023

Contents

1 疑問点 **2**

2 正と仮定した場合 **2**

3 定数が負じゃなきゃいけない理由 **3**

4 というわけで **4**

1 疑問点

11/16 日実施の不自由問題の [問 1] で、

$$\frac{1}{R}R'' + \frac{1}{r}\frac{1}{R}R' - \frac{k^2}{r^2} = (\text{定数}) \tag{1}$$

という形の微分方程式が出てきまして、そんで問題中では、（定数）の部分を負とみなし、$-{\xi_k}^2$ とおいて、ベッセルの微分方程式に帰着させて解いた訳です。ただ、「どうして負じゃなきゃいけないのさ」という疑問がいまいち拭えませんでした。もっというと、別に正だと仮定しても級数解法で解けるじゃないか、と。[1]

2 正と仮定した場合

実際、正の定数 $+{\xi_k}^2$ を仮定してやると、（ 1 ）式は

$$r^2R'' + rR' + (-{\xi_k}^2 r^2 - k^2)R = 0 \tag{2}$$

という形になります。この時 $\xi_k r = \rho$ とでもおいてやれば、

$$\rho^2 R'' + \rho R' + (-\rho^2 - k^2)R = 0 \tag{3}$$

という形になり、ベッセルの微分方程式に似た

$$x^2 y'' + xy' + (-x^2 - \alpha^2)y = 0 \tag{4}$$

という形に帰着できます。ベッセルの微分方程式と同様、

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+s}\ ,\ (c_0 \neq 0) \tag{5}$$

という級数解を想定して、こいつを代入して整理してやると、(4) 式は、

$$c_0(s^2 - \alpha^2)x^s + c_1\left\{(s+1)^2 - \alpha^2\right\}x^{s+1} + \sum_{n=2}^{\infty}\left\{c_n\left((n+s)^2 - \alpha^2\right) - c_{n-2}\right\} = 0 \tag{6}$$

となり、[2]各係数についての条件

$$\begin{aligned} c_0(s^2 - \alpha^2) &= 0 \\ c_1\left\{(s+1)^2 - \alpha^2\right\} &= 0 \\ c_n\left((n+s)^2 - \alpha^2\right) - c_{n-2} &= 0 \end{aligned}$$

を得るわけです。[3] んで、$c_0 \neq 0$ から、$s = \pm\alpha$ を得るので、たとえば $s = \alpha$ の場合においては、上の漸化式は

$$\begin{aligned} c_n &= 0 && (n : \text{奇数}) \\ c_n &= \frac{\Gamma(\alpha+1)c_0}{2^n(n/2)!\Gamma(\frac{n}{2}+\alpha+1)} && (n : \text{偶数}) \end{aligned}$$

と解けて、特に $n = 2m$,$c_0 = \frac{1}{2^\alpha\Gamma(\alpha+1)}$ とおいてやれば、級数解は

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} x^{2m+\alpha} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!\Gamma(\alpha+m+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\alpha} \tag{7}$$

と解けるわけです。（結局、第一種ベッセル関数の $(-1)^m$ を取っ払ったものが出てくる。）で、ダランベールの判定法を用いれば、こいつの収束半径は ∞。あとは、こいつと独立な解（第二種ベッセル関数にあたるもの）を持って来れば、定数 ξ が正でもなんか解けそうじゃね？となってくる。てかどうせ解けるんじゃないの？やっぱりなんで定数が負じゃなきゃいけないのさ。

---

[1] 虚数も全然出てこないし。

[2] ベッセル方程式の場合は、左辺の一番最後の項の c_{n-2} の係数が正になる。

[3] 桂華先生から、「定数 ξ を正にした場合虚数が出てきて問題になるんじゃないか」みたいな話があったが、おそらく ξ を正にした影響が $c_0(s^2 - \alpha^2) = 0$ の部分に効いてくる（$c_0(s^2 + \alpha^2) = 0$ になる）と考えてしまっていた可能性がある。多分。

3　定数が負じゃなきゃいけない理由

とまあ、こんな具合に疑問点が拭えず、くねくねしてたのですが、ネットにいい感じの文献を見つけたのでその一部をご紹介します。結論から言うと、「やっぱり定数は負じゃなきゃダメだよ」と言うことらしいです。

とりあえず、(1) 式の定数を、正負を定めずに λ とおきます。この時、(1) 式は

$$\frac{1}{R}R'' + \frac{1}{r}\frac{1}{R}R' - \frac{k^2}{r^2} = \lambda \tag{8}$$

と言う形になります。そして実はこいつ、

$$\left\{\frac{1}{r}\left(\frac{d}{dr}r\frac{d}{dr} - \frac{k^2}{r}\right)\right\}R = \lambda R \tag{9}$$

と変形できます。[4] なので、左辺を一つの演算子 $L = \left\{\frac{1}{r}\left(\frac{d}{dr}r\frac{d}{dr} - \frac{k^2}{r}\right)\right\}$ と見做せば、（9）式は

$$LR = \lambda R \tag{10}$$

と言う固有値問題になるわけです。（このことはここでは特に使いませんが。）

ここで、メチャクチャに天下り的ではありますが、

$$I = \int_{r=0}^{\infty} RLRrdr \tag{11}$$

と言う積分を二通りの方法で評価する方法を考えます。まず、$LR = \lambda R$ であることを用いれば、

$$I = \lambda\int_{r=0}^{\infty} R^2 rdr \tag{12}$$

となります。また、I は次のようにも変形できるようです。

$$I = -\int_{r=0}^{\infty}\left(R'^2 r + R^2\frac{k^2}{r}\right)dr \tag{13}$$

(※)：証明

$\lim_{r\to\infty} R(r) = 0$ の解を想定すれば、

$$-\int_{r=0}^{\infty}\left(R'^2 r + R^2\frac{k^2}{r}\right)dr = \int_{r=0}^{\infty}\left(-R'(R'r) - R^2\frac{k^2}{r}\right)dr \tag{14}$$

$$= -\left[R(R'r)\right]_0^{\infty} + \int_{r=0}^{\infty}\left(R(R'r)' - R^2\frac{k^2}{r}\right)dr \tag{15}$$

$$= 0 + \int_{r=0}^{\infty} R\left(\frac{d}{dr}r\frac{d}{dr} - \frac{k^2}{r}\right)Rdr \tag{16}$$

$$= \int_{r=0}^{\infty} RrLRdr \tag{17}$$

$$= \int_{r=0}^{\infty} RLRrdr \tag{18}$$

よって、(12) 式と (13) 式より、

$$\lambda\int_{r=0}^{\infty} R^2 rdr = -\int_{r=0}^{\infty}\left(R'^2 r + R^2\frac{k^2}{r}\right)dr \tag{19}$$

となり、積分記号の中は両辺ともに正であるから、λ は負となる。

[4] そんなの思いつかねえよふざけんな、と思いましたが、ベッセル微分方程式をより一般的に sturm-liouville 型方程式の一つと見れば自然と出てくるっぽいです。なんやねん。

4　というわけで

というわけで、λ は負でなければいけない。ここでの証明は激しく天下っているが、ベッセルの微分方程式よりも一般の場合である turm-liouville 型微分方程式という観点から話を進めていくと、結構すんなり示せるっぽい。てやんでぇ。