地球物理データ解析 quiz#3

05-242628 三田村彰大

December 17, 2025

初めに準備として、確率変数 x が対数正規分布 $\mathcal{LN}\left(\mu, \sigma^2\right)$ に従うとき $(\log x - \mu)/\sigma$ が標準正規分布 $\mathcal{N}(0,1)$ に従うこと、すなわち以下を示す。

$$x \sim \mathcal{LN}\left(\mu, \sigma^2\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\log x - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1) \tag{1}$$

今、確率変数が標準正規分布に従うことの定義は

$$z \sim \mathcal{N}(0,1) \quad :\Leftrightarrow \quad p(a \leq z \leq a + \delta a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{a^2}{2}\right) \delta a \tag{2}$$

であるから、示すべきは

$$p\left(a \leq \frac{\log x - \mu}{\sigma} \leq a + \delta a\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{a^2}{2}\right) \delta a \tag{3}$$

である。今、log の単調増加性などに注目すれば、(3) 左辺の括弧の中の事象は次のように変形できる。

$$\begin{aligned}
a \leq \frac{\log x - \mu}{\sigma} \leq a + \delta a \quad &\Leftrightarrow \quad \sigma a + \mu \leq \log x \leq \sigma a + \mu + \sigma \delta a & (4)\\
&\Leftrightarrow \quad e^{\sigma a + \mu} \leq x \leq e^{\sigma a + \mu + \sigma \delta a} & (5)\\
&\Leftrightarrow \quad e^{\sigma a + \mu} \leq x \leq e^{\sigma a + \mu}\, e^{\sigma \delta a} & (6)\\
&\Leftrightarrow \quad e^{\sigma a + \mu} \leq x \leq e^{\sigma a + \mu} \left\{1 + \sigma \delta a + \mathcal{O}\left(\delta a^2\right)\right\} & (7)\\
&\Leftrightarrow \quad e^{\sigma a + \mu} \leq x \leq e^{\sigma a + \mu} + e^{\sigma a + \mu} \cdot \sigma \delta a + \mathcal{O}\left(\delta a^2\right) & (8)
\end{aligned}$$

ただし (8) では指数関数のテイラー展開を用いた。よってこれを用いれば、(3) 式の左辺は以下のようになる。

$$p\left(a \leq \frac{\log x - \mu}{\sigma} \leq a + \delta a\right) = p\left(e^{\sigma a + \mu} \leq x \leq e^{\sigma a + \mu} + e^{\sigma a + \mu} \cdot \sigma \delta a + \mathcal{O}\left(\delta a^2\right)\right) \tag{9}$$

ここに、x は対数正規分布に従うのであったから

$$p(b \leq x \leq b + \delta b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2} b} \exp\left(-\frac{(\log b - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \delta b \tag{10}$$

であり、これを用いれば（9）の右辺は次のように計算される。

$$p\left(e^{\sigma a+\mu}\leq x\leq e^{\sigma a+\mu}+e^{\sigma a+\mu}\cdot\sigma\delta a+\mathcal{O}\left(\delta a^2\right)\right) \tag{11}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}e^{\sigma a+\mu}}\exp\left(-\frac{\left(\log\left(e^{\sigma a+\mu}\right)-\mu\right)^2}{2\sigma^2}\right)e^{\sigma a+\mu}\cdot\sigma\delta a \tag{12}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{a^2}{2}\right)\delta a \tag{13}$$

ただし（13）を導くに当たっては二次の微少量を無視した。よって

$$p\left(a\leq\frac{\log x-\mu}{\sigma}\leq a+\delta a\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{a^2}{2}\right)\delta a \tag{14}$$

となり、（2）の定義と見比べることで $(\log x-\mu)/\sigma$ が標準正規分布にしたがっていることがわかる。

Q1

まず初めに、地震の recurrence interval Δt が従う対数正規分布 $\mathcal{LN}\left(\mu,\sigma^2\right)$ の μ と σ を求める。今

$$\Delta t=137.1,106.4,102.7,147.2,92.0 \tag{15}$$

が与えられているが、この時の $\log\Delta t$ の従う正規分布の期待値・分散が μ,σ^2 であるから、次のように計算されなければならない。[*1]

$$\hat{\mu}=\frac{1}{n}\sum\log\Delta t_i=4.75 \tag{16}$$

$$\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{\sum\left(\log\Delta t_i-\hat{\mu}\right)^2}{n-1}}=0.200 \tag{17}$$

[*2]その上で、今回計算したいのは”95 % confidence bound of the next earthquake as of t = 1947.0” であり、これは以下のように定式化できる。

$$\text{Question: find }\Delta t_{95}\text{ such that}\quad p\left(\Delta t\leq\Delta t_{95}\right)=0.95 \tag{18}$$

特に今 Δt は対数正規分布に従うので、先の議論から $z=\left(\log\Delta t-\hat{\mu}\right)/\hat{\sigma}$ は標準正規分布に従う。またこの時

$$\Delta t\leq\Delta t_{95}\Leftrightarrow z\leq\frac{\log\Delta t_{95}-\hat{\mu}}{\hat{\sigma}} \tag{19}$$

である。よって（18）は以下のように読み替えることができる。

$$\text{Find }\Delta t_{95}\text{ such that}\quad p\left(z\leq\frac{\log\Delta t_{95}-\hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\right)=0.95\quad\text{while}\quad z\sim\mathcal{N}(0,1) \tag{20}$$

[*1] 対数正規分布における μ,σ^2 はあくまで「log を取った確率変数が従う分布の期待値・分散」であり、確率変数そのものが従う分布の期待値・分散ではないことに注意する必要がある。
[*2] ただし n はデータ数で、今回の場合は $n=5$

よって標準正規分布表を用いれば[*3]、

$$p\left(z \leq 1.64\right) = 0.95 \tag{21}$$

などがすぐにわかり、ここから

$$\frac{\log \Delta t_{95} - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}} = 1.64 \tag{22}$$

$$\rightarrow \Delta t_{95} = 160.0 \ \ \text{yrs} \tag{23}$$

として Δt_{95} が求まる。よって、"95 % confidence bound of the next earthquake as of t = 1947.0" は

$$t_{boundary} = 1947.0 + 160.0 = 2107 \tag{24}$$

と求まり、今回の仮定の下では「南海トラフ地震は 95% の確率で 2107 年までに生じる」と言える。

Q2

今、以下のような表記を用いることにする。

$$\Delta t_1 = 2026.0 - 1947.0 \tag{25}$$

$$\Delta t_2 = 2066.0 - 1947.0 \tag{26}$$

この時、"No large earthquakes occurred between t = 1947.0 and t = 2026.0" の意味するところは、「地震の recurrence interval Δt が 2026.0 − 1947.0 より大きかった」と言うことである。また、"probability of occurrence of an earthquake between t = 2026.0 and t = 2066.0" とはすなわち「Δt が $\Delta t_1 = 2026.0 - 1947.0$ より大きく 2066.0 − 1947.0 より小さくなる確率」のことである。よって、今回計算するべきは以下の条件付き確率である。

$$p\left(\Delta t_1 \leq \Delta t \leq \Delta t_2 | \Delta t_1 \leq \Delta t\right) \tag{27}$$

ここで、ベイズの定理を用いれば、(27) は

$$p\left(\Delta t_1 \leq \Delta t \leq \Delta t_2 | \Delta t_1 \leq \Delta t\right) = \frac{p\left\{\left(\Delta t_1 \leq \Delta t \leq \Delta t_2\right) \wedge \left(\Delta t_1 \leq \Delta t\right)\right\}}{p\left(\Delta t_1 \leq \Delta t\right)} \tag{28}$$

$$= \frac{p\left(\Delta t_1 \leq \Delta t \leq \Delta t_2\right)}{p\left(\Delta t_1 \leq \Delta t\right)} \tag{29}$$

のように計算される。さらに、Q1 と同様にして

$$p\left(\Delta t_1 \leq \Delta t \leq \Delta t_2\right) = p\left(\frac{\log \Delta t_1 - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}} \leq \frac{\log \Delta t - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}} \leq \frac{\log \Delta t_2 - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\right) \tag{30}$$

$$p\left(\Delta t_1 \leq \Delta t\right) = p\left(\frac{\log \Delta t_1 - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}} \leq \frac{\log \Delta t - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\right) \tag{31}$$

[*3] https://unit.aist.go.jp/mcml/rg-orgp/uncertainty_lecture/normsdist.html

と読み替えれば、$z=(\log\Delta t-\hat{\mu})/\hat{\sigma}$ は標準正規分布に従い、また

$$\begin{aligned} \frac{\log\Delta t_1-\hat{\mu}}{\hat{\sigma}} &= -1.88 \qquad (32) \\ \frac{\log\Delta t_2-\hat{\mu}}{\hat{\sigma}} &= 0.162 \qquad (33) \end{aligned}$$

のように計算されるから、

$$\begin{cases} p(\Delta t_1\leq\Delta t\leq\Delta t_2) = p(-1.88\leq z\leq 0.162) \\ p(\Delta t_1\leq\Delta t) = p(-1.88\leq z) \end{cases} \quad \text{under:} \quad z\sim\mathcal{N}(0,1) \qquad (34)$$

である。よってこれは標準正規分布表を用いて求めることができ、

$$\begin{aligned} p(-1.88\leq z\leq 0.162) &= 0.534 \qquad (35) \\ p(-1.88\leq z) &= 0.970 \qquad (36) \end{aligned}$$

となる。よって（29）に代入して、

$$p(\Delta t_1\leq\Delta t\leq\Delta t_2|\Delta t_1\leq\Delta t)=\frac{0.534}{0.970}=0.550 \qquad (37)$$

を得る。よって向こう 40 年で南海トラフ地震が起きる確率は

$$p_{quake}=55\% \qquad (38)$$

とわかる。[*4]

[*4] 確かに政府が言うほど高くない。

Appendix: Source cord

Listing 1: code

```
program main
    implicit none

    real(8) :: x(5)
    real(8) :: s,ave
    integer :: i

    real(8) :: delta_t1
    real(8) :: delta_t2

    !=========Q1==========================
    x(1) = 137.1
    x(2) = 106.4
    x(3) = 102.7
    x(4) = 147.2
    x(5) = 92.0

    x = log(x)

    ave = sum(x)/real(size(x),8)

    s = 0.0
    do i = 1,5
        s = s + (x(i)-ave)**2.0
    end do
    s = s/real(5-1,8)
    s = sqrt(s)

    write(*,*) 'mu:',sum(x)/real(size(x),8)
    write(*,*) 'sigma:',s

    write(*,*) 't_95:',exp(1.64 * s + ave)
    write(*,*) '95%bound:',1947 + exp(1.64 * s + ave)

    !=========Q2==========================
    delta_t1 = 2026.0-1947.0
    delta_t2 = 2066.0-1947.0

    write(*,*) 'lower_bound:',(log(delta_t1)-ave)/s
    write(*,*) 'upper_bound:',(log(delta_t2)-ave)/s

    write(*,*) 'final_ans:',((1.0-0.436441)-0.030054)/(1.0-0.030054)

end program main
```